

物理学 B

(平成 11 年 9 月)

B1 から B6 までの 6 問の中から 3 問を選択し解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

B1

低エネルギーでの中性子の原子核による散乱の断面積を求めたい。重心系で考える事にして、換算質量を m 、相対座標を \mathbf{r} 、中心力ポテンシャルを $V(r)$ 、エネルギーを E とした時のシュレディンガー方程式を

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right\} \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

と書く。この方程式の極座標表示 (r, θ, ϕ) での r 方向の微分方程式は角運動量が l の時には $R(r)$ を r 方向の動径波動関数として

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right\} R(r) = ER(r)$$

と書ける。その解の $r \rightarrow \infty$ での漸近形は

$$\psi(\mathbf{r}) \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (*)$$

と書くことができる。この式で $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ であり第一項は入射波で第二項は散乱波を表わし、 $f(\theta)$ は散乱振幅と呼ばれる。この時の微分断面積 $d\sigma(\theta)/d\Omega$ は散乱振幅 $f(\theta)$ を用いて

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

と与えられる。ただし Ω は立体角である。これらの知識を使って下記の問に答えよ。ただし、以下ではエネルギー E は非常に小さく、角運動量が $l = 0$ の部分波のみが散乱に関与するとする。

- (1) 波動関数 ($l = 0$) を $R(r) = \chi(r)/r$ とおく。その時の $\chi(r)$ に対する r 方向の微分方程式を書け。

(2) ある長さ a があって、 $r > a$ で $V = 0$ である時、 $r > a$ での解は

$$R(r) = \frac{A}{kr} \sin(kr + \delta)$$

と書いても良いことを示せ。この時、 A と式 (*) で定義された散乱振幅 $f(\theta)$ を位相差 δ で表せ。ただし、 e^{ikz} の部分波展開で $l = 0$ の部分は $(kr)^{-1} \sin kr$ である。

(3) ポテンシャルが井戸型で与えられているとする。

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

この時 $r < a$ の領域での波動関数と $r > a$ の波動関数との接続条件を求めよ。

(4) $k \rightarrow 0$ のときの散乱の全断面積 σ を求めよ。

B2

理想電子気体に一様な磁場 H が z 方向にかけられている時に、一電子のエネルギー準位が次の様に与えられる場合を考える。

$$\varepsilon(\ell, p_z, \sigma) = 2\mu_B \mu_0 H \left(\ell + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2m} p_z^2 + \sigma \mu_B \mu_0 H$$

ここで、 μ_0 は真空透磁率、 μ_B はボーア磁子、 m は電子の質量を表わす。第1項は、量子化された xy 平面内の運動エネルギーに相当し、量子数 ℓ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) で指定される。第2項は z 方向の運動エネルギーであり、 z 方向の運動量 p_z で指定される。最後の項は電子スピンによるゼーマンエネルギーを表わし、 σ はスピンの向きに応じて $+1$ または -1 を表わす。量子数 ℓ で指定されるそれぞれの状態は $m\mu_B\mu_0 H L^2 / \pi \hbar^2$ 重に縮退している。ただし、ここでは簡単のため電子系のある領域を一辺の長さが L の立方体 ($L^3 = V$) と考えた。

粒子密度が小さくかつ高温の場合には、この電子系はボルツマン統計に従うと考えてよく、全体の分配関数は、全電子数を N 、一電子の分配関数を Z として、 $Z^N/N!$ で与えられる。この場合に、以下の設問に答えよ。ただし、 k をボルツマン定数、 T を温度とする。

- (1) この電子系の電子一個あたりの分配関数 Z は、 xy 平面内の運動に関する部分 Z_d と、 z 方向の運動に関する部分 Z_z と、スピンの自由度に関する部分 Z_s とを別々に考えて、 $Z = Z_d \times Z_z \times Z_s$ と書くことが出来る。 Z_d 、 Z_z 、 Z_s をそれぞれ求めよ。
- (2) スピンに起因した磁化 M_s と $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ_s を求めよ。
- (3) xy 平面内の運動に起因した磁化 M_d と $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ_d を求めよ。

ただし、(2) と (3) では、ヘルムホルツの自由エネルギー F を用いて、磁化 M と $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ は次の式で与えられる事を用いてよい。

$$M = -\frac{1}{V\mu_0} \frac{\partial F}{\partial H}, \quad \chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{M}{H}$$

B3

以下の問題に答えよ。下記の問題の解答作成にあたって、答えだけではなく、答えに至る過程を丁寧に記すこと。

微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2\right) f(t) = j(t) \quad (*)$$

の解を、以下で指示する境界条件の下で求めよう。ただし、 a は正の実数である。

(1) 時刻 t の関数

$$G(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(t-t')}}{k^2 - a^2 + i\epsilon} dk$$

が、次の方程式

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2\right) G(t - t') = -\delta(t - t')$$

の解であることを示せ。ただし、 $\epsilon > 0$ は正の微少量 (実数) である。

(2) (1) で定義された関数 $G(t - t')$ の具体的な表式を複素積分の手法を使って求めよ。 $G(t - t')$ は $t > t'$ と $t < t'$ の場合に分けて表せ。

(注) 極は微少量 $\epsilon > 0$ の一次まで求め、最後に $\epsilon \rightarrow 0$ とし、 ϵ の入らない表式を求めること。

(3) 式(*)の解を、関数 $G(t - t')$ を用いて表そう。ただし、源(ソース) $j(t)$ がある有限時間の間だけゼロでないとき、 $f(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で $f(t) \propto e^{-iat}$ 、 $t \rightarrow -\infty$ で $f(t) \propto e^{iat}$ のように振る舞うとする。

(4) 源 $j(t)$ が

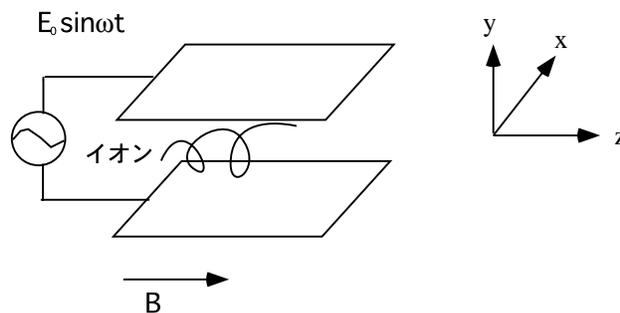
$$j(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq \pi/a) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であるとき、 $f(t)$ を $t > \pi/a$ と $t < 0$ の場合について計算せよ。

B4

イオンの質量を電荷との比で測定するために以下の方法を用いた。 z 軸方向に磁場 (磁束密度 B) をかけ、平行な 2 枚の電極で y 軸方向に高周波電場を印加した。電極の中心あたりから常温程度の速度分散をもつイオンを放出させた。このとき以下の問いに答えよ。なお以下の計算は全て非相対論の範囲で行え。また周波数は角周波数をさす。

- (1) 磁場だけを考えるとイオンは xy 面内で円運動を行う。この周波数 (サイクロトロン周波数 ω_c) を求めよ。ここでイオンの電荷を e とし、質量を m とする。
- (2) y 方向にサイクロトロン周波数に一致する高周波電場 $E_y = E_0 \sin \omega t$ を印加する。この時運動方程式をベクトルの形か或は x, y 成分にわけて書け。
- (3) 速度 $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ で円運動している粒子の運動エネルギーは高周波電場で変化する。高周波電場と円運動の位相差を考慮して 1 周期あたりに獲得する運動エネルギーの最大値を求めよ。なお 1 周期当りの速度の変化は v_0 に比較して十分に小さいとする。
- (4) イオンが獲得するエネルギーだけ高周波電場の出力は吸収される。高周波の周波数がサイクロトロン周波数からずれると吸収が起りにくくなる。イオンは xy 面内で加速されたり、 z 方向に進行することで高周波電場の領域から逃げていく。簡単のため、逃げ出すのに要する時間を T として、ゆっくり ($T \gg 1/\omega$) 逃げて行くとしたとき、吸収の起る条件は周波数の差 $\delta\omega$ と T でどの様に表せるか。
- (5) サイクロトロン周波数は高周波電場の出力に吸収が起る周波数として幅をもって観測される。この幅を測定精度と考える時、イオンの質量 m の精度を上げるために出来るだけ強い磁場が望ましいがこの理由を述べよ。

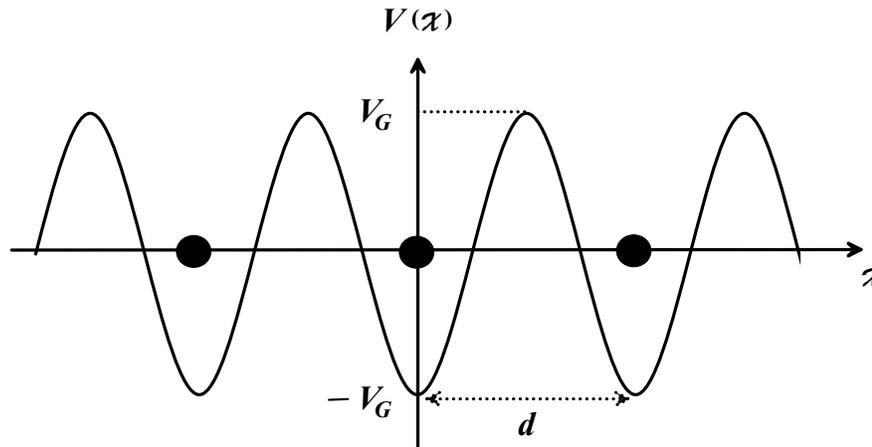


B5

- (1) いま、簡単のために図のような一次元周期ポテンシャルをもつ結晶を考える。周期ポテンシャルは

$$V(x) = -V_G \cos(2\pi x/d)$$

と書ける。ただし、 $V_G > 0$ 、 d は格子間隔である。



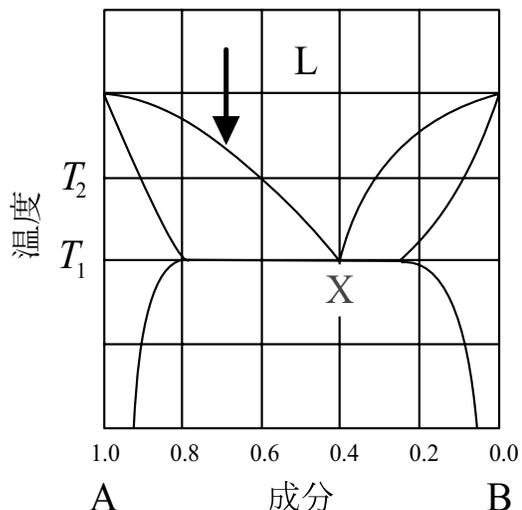
- (a) $V_G/[(\hbar G)^2/2m] \ll 1$ を仮定し、伝導電子の波動関数は 2 つの波動関数 $\psi^+ = (Nd)^{-1/2} \exp(ikx)$ と $\psi^- = (Nd)^{-1/2} \exp(i(k - G)x)$ の重ね合わせで表せると近似し、波数ベクトル k が $k = +\pi/d$ のときのエネルギー固有値を求めよ。ただし、 $G (= 2\pi/d)$ は逆格子ベクトル、 m は電子の質量、 N は格子の数である。
- (b) 次に (a) で求めたエネルギーの低い方の固有状態で表される電子の確率密度を、ポテンシャル $V(x)$ との位相関係が分かるように、横軸 x の関数として解答用紙に図で表せ。
- (2) 銅、銀、金などの三次元結晶中の伝導電子は自由電子モデルが良い近似になっている。金の電気抵抗を 500K から液体ヘリウム温度まで測定した。
- (a) 金の電気抵抗 ρ の温度変化のだいたいの様子を、縦軸を ρ 、横軸を温度 T として図に示せ。特に、500K 近くの高温と 10K 以下の低温で物理的思考が解るように注意して図を書け。
- 必要があれば次のことを参考にせよ。エネルギー $\hbar\omega_D (= k_B\Theta_D)$ のフォノンの分布関数の値は $n = [\exp(\Theta_D/T) - 1]^{-1}$ で与えられる。ただし、 k_B はボルツマン定数、 Θ_D は Debye 温度を表し、金の Debye 温度は 165K である。
- (b) また、金に数パーセントの銅を不純物として加えた。液体ヘリウム温度付近の電気抵抗はどのように変化するか (a) と同じ図に示せ。

B-6

(1) から (3) のうち 2 問を選択し、解答せよ。

(1) 右図は 2 成分系の相図である。L は液相、 α と β は固相である。

- 温度 T_1 で起こるこの相図を特徴づける反応を何と呼ぶか。さらに点 X (温度 T_1 , 組成 A: 0.4, B: 0.6) において相律を示せ。ただし圧力は独立変数から除く。
- α 相は最高何%まで B を固溶できるか。
- 温度 T_2 における、液相と固相のそれぞれの自由エネルギー曲線 ΔG_L , ΔG_α , ΔG_β を成分分率を横軸にして図示せよ。
- 矢印の液 (組成 A: 0.7, B: 0.3) を徐冷し温度 T_2 において保持した後、急冷した。この試料を顕微鏡観察するとどう見えるか。組織像を描き、さらに組織の特徴とその組成および複数の相がある場合、その量比を示せ。



(2) ダイヤモンドに関する以下の問に答えよ。

- ダイヤモンドと石墨はともに炭素の同質異晶 (多形) である。ダイヤモンドと石墨では、硬度および可視光の透過性が大きく異なる。この理由を説明せよ。
- 宝石用にカットされたガラス (SiO_2 が主成分) とキュービックジルコニア (立方晶系の ZrO_2) およびダイヤモンドがある。組成分析や構造解析を行うことなく、非破壊でより簡便な複数の方法を用いてこれら 3 種類の石を同定したい。2 種類以上の観察や測定手段を用いて同定する際の手順と識別に利用する物性の違いについて簡単に示せ。
- 次に挙げる事項のうち 2 つを選び知るところを簡単に記せ。

キンバーライト、ダイヤモンドに含まれる不純物、合成ダイヤモンド、プレソラーダイヤモンド、ダイヤモンドの諸物性、ダイヤモンド箔膜

- (3) マントル中の主要な物質と考えられている Mg_2SiO_4 は加圧によりオリビン型から変形スピネル型を介してスピネル型へ相転移し、さらに高い圧力下では MgSiO_3 と MgO に分解する。表に各相の室温 1 気圧下での結晶データを示す。

結晶構造	分子式	晶系	単位格子中の 分子数 (Z)	格子定数 (nm)		
				a	b	c
オリビン型	Mg_2SiO_4	斜方	4	0.60	0.48	1.02
変形スピネル型	Mg_2SiO_4	斜方	8	0.83	1.14	0.57
スピネル型	Mg_2SiO_4	立方	8	0.81		
ペロブスカイト型	MgSiO_3	斜方	4	0.49	0.69	0.48
NaCl 型	MgO	立方	4	0.42		

- (a) これらの相転移と分解反応はマントル領域で観測される地震波速度の不連続とどう対応しているか、マントルの層構造に関連づけて述べよ。
- (b) 相転移と分解反応により体積はどう変化していくか。表の値を用いて、オリビン型の体積を 100 としたときの 2 つの高圧相と分解相 (2 相混合) の体積を計算せよ。
- (c) 実際に上部マントルに含まれるオリビン相が地球深部に運ばれ上記の相転移や分解反応が起こるとき、反応の前後での体積差は (b) で求めたものに比べ大きくなるか小さくなるかを考察し、その根拠とともに述べよ。
- (d) X 線を物質に照射すると透過、吸収、回折、特性 X 線の発生などの物理現象が起こる。照射 X 線の種類 (単色光か白色光) と上記 4 つの物理現象の組み合わせから 2 つを選択し、地球惑星科学の研究への応用例と用いる原理、さらにその手段の長所と短所などを簡単に記せ。