

物理学 B

(平成 12 年 8 月)

B1 から B6 までの 6 問の中から 3 問を選択し解答せよ。ただし理論の志望者は B1, B2, B3 から 2 問以上選択することが必要である。解答用紙の問題番号の欄に選択した問題の番号を書くこと。なお、問題 B6-a には専用の解答用紙があるので申し出ること。

B1 (量子力学)

ポテンシャル $V(x, y) = (m\omega_0^2/2)(x^2 + y^2)$ の中で xy 平面内の二次元的運動をする電子を考える。 z 軸方向には一様な磁場 B が加えられている。電子の質量を m 、電荷を e ($e < 0$) とする。電子のスピンによる効果は無視する。一様な磁場に対応するベクトル・ポテンシャルを $A = (B/2)(-y, x, 0)$ と選ぶと、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{eBy}{2} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{eBx}{2} \right)^2 + V(x, y)$$

で与えられる。ただし、 $p_x = -i\hbar(\partial/\partial x)$, $p_y = -i\hbar(\partial/\partial y)$ は正準運動量演算子の x, y 成分である。このとき、以下の問に答えよ。

(1) 次の演算子を導入する。

$$P = \frac{1}{2} \left(p_x + \frac{y}{2k} \right), \quad Q = \frac{1}{2} \left(p_y - \frac{x}{2k} \right)$$

$$X = \frac{1}{2} \left(p_y + \frac{x}{2k} \right), \quad Y = \frac{1}{2} \left(p_x - \frac{y}{2k} \right)$$

交換関係 $[P, Q]$, $[X, Y]$, $[P, X]$, $[P, Y]$, $[Q, X]$, $[Q, Y]$ を求めよ。

(2) 適当な k ($k > 0$) を選ぶことによって、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1 + eBk}{m} (P^2 + Q^2) + \frac{1 - eBk}{m} (X^2 + Y^2)$$

と書ける。 k をどのように選べばよいか。以下ではこのような k を用いる。

(3) 演算子 $a = \sqrt{2k/\hbar}(P + iQ)$, $b = \sqrt{2k/\hbar}(X + iY)$ を用いて、ハミルトニアンはさらに

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_a \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_b \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)$$

と書けることを示せ。 a^\dagger, b^\dagger は、それぞれ、 a, b にエルミート共役な演算子である。 ω_a と ω_b はどのように表されるか。また、この系のエネルギー固有値は一般にどのように表されるか。

(4) 磁場 B を加えることによって生じる基底状態のエネルギー変化を磁場に関して 2 次の範囲まで求めよ。また、これより、基底状態において磁場によって誘起された z 軸方向の磁気モーメントを磁場に関して 1 次の範囲まで、符号を含めて求めよ。

B2 (熱・統計力学)

磁性体の最も簡単な統計モデルとして、各サイトでの磁気モーメント(スピン)が上向きか下向きかの2つの状態しかとれないとするイジング・モデルがある。イジング・モデルでは、各変数 σ はスピンの2つの状態に対応して $\sigma = 1$ か $\sigma = -1$ の値をとる。今、交換相互作用 J で結合した2個のスピンの絶対温度 T の熱浴と接触し、熱平衡状態にあるとしよう。2個のスピンをそれぞれ σ_1, σ_2 として、外部磁場 H のもとでの系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -J\sigma_1\sigma_2 - H(\sigma_1 + \sigma_2)$$

で与えられる。交換相互作用 J が正の場合には2個のスピンは互いに同じ向きを向こうとし(強磁性的相互作用)、 J が負の場合には2個のスピンは互いに逆の向きを向こうとする(反強磁性的相互作用)。ボルツマン定数を k として、以下の問に答えよ。

- (1) この系の分配関数(状態和)を温度 T 、外部磁場 H の関数として求めよ。
- (2) この系の熱容量を外部磁場が0の場合について求めよ。
- (3) この系の零磁場帯磁率 χ を求めよ。ただし零磁場帯磁率は系のヘルムホルツの自由エネルギーを F として

$$\chi = - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial H^2} \right|_{H=0}$$

で与えられる。

- (4) χ の温度依存性の概略を $J > 0$ と $J < 0$ の双方の場合についてグラフに図示せよ。さらに χ が低温極限 $T \rightarrow 0$ でどのようにふるまうかを $J > 0$ と $J < 0$ の双方の場合について述べよ。
- (5) $J > 0$ の場合と $J < 0$ の場合とでは低温における χ のふるまいは定性的に大きく異なる。この違いの物理的理由を(3)で求めた数式によらず直観的に説明せよ。

B3 (物理数学)

x, y, z を三つの実数とする。これらの実数とパウリ行列 σ_i ($i = x, y, z$) を用いて

$$X = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \quad (\text{a})$$

という二行二列の行列をつくったとする。ここで $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ というベクトルの記法を用いている。ただしパウリ行列は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義される。

A を複素数体上の二行二列の任意の行列とする。この A を用いて上の行列を次のように変換したとする。

$$X \longrightarrow X' = AXA^\dagger \equiv \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} \\ x'_{21} & x'_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{b})$$

ここで \dagger は複素共役をとって転置する操作を意味する。

- (1) A がいかなる行列であれ、 x'_{11}, x'_{22} は実数であり、また $(x'_{12})^* = x'_{21}$ であることを示せ。ここで $*$ は複素共役をとる操作を意味する。
- (2) A がユニタリー行列 ($A^\dagger A = I$) ならば、 $x'_{11} + x'_{22} = 0$ であることを示せ。
- (3) A がユニタリー行列であるとする。(1)、(2)の結果により

$$X' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \quad (\text{c})$$

と書くことにする。 x', y', z' は実数である。このとき

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$$

であることを示せ。これにより三次元空間の回転にユニタリー行列 A を対応させることができる。

- (4) ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を、単位ベクトル \mathbf{n} の周りに微小な角度 $\Delta\phi$ だけ回転すると $\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r})\Delta\phi$ という変化を受ける。このとき (a) の X と (c) の X' は

$$X' = X - \frac{i}{2}[(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}), X]\Delta\phi$$

を満たすことを示せ。必要ならば $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$ 等々の交換関係は既知として用いてよい。これにより、ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を単位ベクトル \mathbf{n} の周りに有限な角度 ϕ だけ回転し、その結果 X が $X(\phi)$ になったとすると、 $X(\phi)$ は

$$\frac{dX(\phi)}{d\phi} = -\frac{i}{2}[(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}), X(\phi)], \quad X(0) = X$$

という微分方程式によって記述されることが分かる。

- (5) $X(\phi) = \exp(-i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\phi/2)X\exp(i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\phi/2)$ は上で得られた微分方程式の解であることを示せ。またベクトル \mathbf{n} の周りの角度 ϕ の回転に対応する (b) 式の二行二列のユニタリ行列 A は

$$A = \cos\frac{\phi}{2} - i(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\frac{\phi}{2}$$

であることを結論せよ。必要ならば反交換関係 $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ ($i, j = x, y, z$) は既知として用いてよい。

B4 (原子核実験)

基底状態にある $^{24}_{11}\text{Na}_{13}$ 核は、図 1 に示すように、 β^- 崩壊によって娘核 $^{24}_{12}\text{Mg}_{12}$ の励起状態に遷移した後、 γ 線を放出して基底状態へ至る。したがって、 $^{24}_{11}\text{Na}_{13}$ 線源からは、 β 線以外に γ 線が放出される。これらの γ 線を測定するために、 $\text{NaI}(\text{Tl})$ シンチレーション検出器を $^{24}_{11}\text{Na}_{13}$ 線源の近くに置いた。

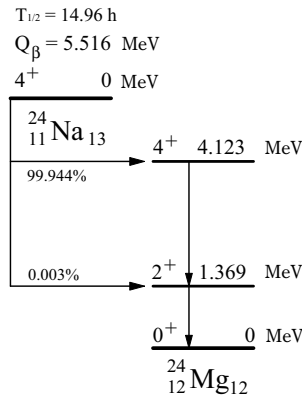


図 1

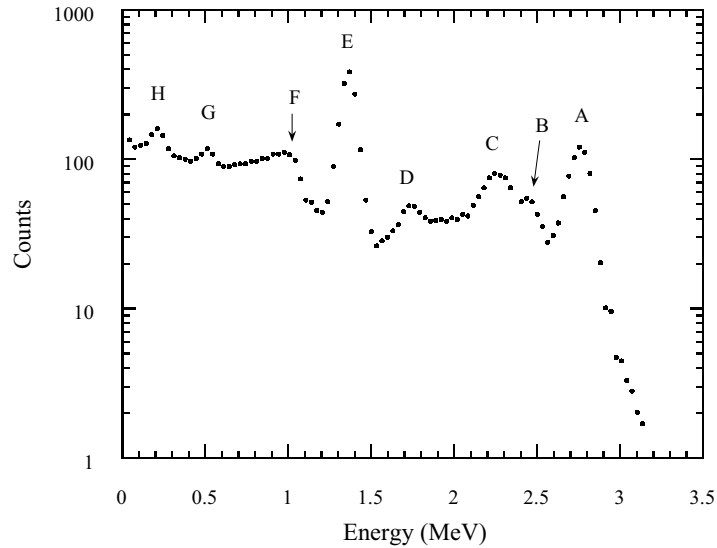


図 2

- (1) 検出器には γ 線とともに β 線も入射する。 β 線の影響を受けないようにして γ 線を観測するためには、どのような工夫をすれば良いか。
- (2) γ 線とシンチレーター物質との相互作用を全てあげ、それぞれどのようなものかを説明せよ。
- (3) 上であげた相互作用のうちの一つ、すなわち、高エネルギーの光子が、静止しているとみなせる電子に衝突して散乱される過程を考察しよう。電子が最も多くの反跳エネルギーを受け取る場合の、電子の運動エネルギー T_{\max} および散乱光子のエネルギー E_{\min} を入射光子のエネルギー E_0 および電子の静止質量エネルギー $m_e c^2$ の関数としてそれぞれ表せ。
- (4) $E_0 \gg m_e c^2$ の時、 E_{\min} はある値に近似出来る。それを MeV 単位で求めよ。
- (5) 図 2 は、 $^{24}_{11}\text{Na}_{13}$ 線源から放出される γ 線を $\text{NaI}(\text{Tl})$ シンチレーション検出器で観測した時に得られたエネルギー・スペクトルを示す。ピーク A から H の 8 つのピークが観測されている。これらのうち、(3) で考察した過程で最大の反跳エネルギーを受けた電子によると考えられるピークを全てあげよ (記号 A から H を用いて答えよ)。
- (6) 同様に、(3) の過程で最もエネルギーを失った光子によると考えられるピークを全てあげよ (記号 A から H を用いて答えよ)。

B5 (物性実験)

物質による x 線の散乱振幅は、物質の電子密度を $\rho(\mathbf{r})$ として次式で表せる。

$$F(\Delta\mathbf{k}) = \int_V \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) dV$$

ここで、 $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ であり、 \mathbf{k} , \mathbf{k}_0 ($k = k_0$) は、それぞれ入射波と反射波の波数ベクトルである。この散乱振幅の一般式を用いて、同種の原子が等間隔 a で一直線上に並んだ一次元結晶による散乱についての以下の問に答えよ。まず $\rho(\mathbf{r})$ は一原子の電子密度 $\rho_0(\mathbf{r})$ の重ね合わせとして次式を仮定する。

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^{N-1} \rho_0(\mathbf{r} - j\mathbf{a})$$

ただし、 N は原子数、 \mathbf{a} は一次元結晶の並進ベクトルである。

(1) 散乱振幅が次式となることを示せ。

$$F(\Delta\mathbf{k}) = f(\Delta\mathbf{k}) \sum_{j=0}^{N-1} \exp(-i\Delta\mathbf{k}\cdot j\mathbf{a})$$

ただし、一原子による散乱振幅は電子密度が球対称として、次式のように f とおいた。

$$f(\Delta\mathbf{k}) = \int_V \rho_0(\mathbf{r}) \exp(-i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) dV$$

(2) 散乱強度は $|F(\Delta\mathbf{k})|^2$ に比例する。以下を示せ。

$$|F(\Delta\mathbf{k})|^2 = \{f(\Delta\mathbf{k})\}^2 L_N(\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{a})$$

ただし、

$$L_N(\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}) = \sin^2(N\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}/2) / \sin^2(\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}/2)$$

(3) 関数 $L_N(\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{a})$ は、

$$\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

のとき極大値 N^2 をとる。ここで m を次数とよぶ。 N が大きくなれば、この式を満たす場合にのみ強い散乱 (回折とよぶ) が起こることを説明せよ。

以下では x 線が \mathbf{a} に垂直に入射する場合について考える。また \mathbf{k} と \mathbf{k}_0 のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。

(4) 回折が生じる方向 (\mathbf{k} の方向) を次数 $m = 1, m = 2$ の場合について図示せよ。ただし一つの m に対して、 θ が連続的に変化する方向に回折が起こることに注意せよ。

(5) ある次数 m で表される回折方向のなかで散乱強度 $|F(\Delta\mathbf{k})|^2$ が最大となる角 $\theta = \theta_m$ について、 a , m および x 線の波長 λ を用いて表せ。ただし、 $f(\Delta\mathbf{k})$ は θ のみの関数であり、 θ の増加と共に単調に減少する関数であることも知られている。

B6 (宇宙地球実験)

注：問題 B6-a か B6-b のいずれかを選択し回答せよ。なお、問題 B6-a は、専用の解答用紙を用いること。

問題 B6-a

- (1) 図 1 は 2 成分系の相平衡図である。図中矢印で示した、組成 ($A_{0.4}B_{0.6}$) の液の冷却過程について、次の設問に答えよ。
- (1-1) 最初に固相が晶出する温度は何度か、その時の固相の組成も示せ。
- (1-2) この液が温度 950 K のとき共存している固相と液相の組成を示し、てこの原理 (レバー・ルール) に基づき、それぞれの量比を示せ。
- (1-3) このような相平衡関係 (図) にある鉱物固溶体の具体例を 2 つ上げよ。
- (2) 図 2 は、無限に広がるタイル張りの一部で、平面群 $p4gm$ に属している。単位格子を点線で示している。単位格子中にある対称の要素 [4 回回転軸 ()、2 回回転軸 (●)、鏡面 (実線)、二種類の映進面 (破線)] すべてを図に直接書き込め。

図 1

図 2

- (3) 以下の用語から 5 つを選び、各 2 ~ 3 行程度で説明せよ。

元素の宇宙存在度

ジャイアント・インパクト

原始地球の大気

35 億年前のシアノ・バクテリア

ウィルソン・サイクル

付加体

カンラン石ソレイアイト

松山逆磁極期

火砕流

層準

変成相

シュード・タキライト

メタン・ハイドレート

ヤンガー・ドライアス事件

光学的一軸性結晶

晶癖

静電原子価則

らせん転位

問題 B6-b

別紙 (p.9) の写真は、焼岳で発生した土石流の先端が砂防ダムの水通し (幅 16 m) 部分を通過しているところを連続撮影 (2 秒間隔) したものである。土石流はここからおよそ 1.5km の地点で発生し、約 6 度の縦断傾斜をもつ谷を流下してきたものである。

写真 1 は土石流の先端部がまさに砂防ダムに到達した瞬間で流れの断面を見ることができる。写真 4 ではカメラの向きからは流れの表面しか見えなくなっている。

- (1) 写真から、土石流に含まれる粒子の大きさに注目して気がつくことを書け。
- (2) 上の現象について、流れの方向に垂直な (ほぼ鉛直な) 粒子の移動に関して、粒子同士の衝突という観点から考える。

[設定] 粒子流は、連続体の流れ (流体) と異なり、粒子同士が衝突することによって体積濃度 C (単位体積内に存在する粒子の体積の割合) が深さ方向に大きく変化する (図 1)。流れの表面付近は自由度が大きく粒子の濃度は低い。濃度は衝突領域と呼ばれる範囲内では深くなるにつれほぼ線形に増加し、摩擦領域と呼ばれるほとんど粒子が動かない場所では、粒子の充填がよくなることで、増加し飽和すると考えられる。その様子を図示すると、最充填時の C を C_0 として C/C_0 を横軸に取り、粒子の平均速度が 0 になる場所を $z = 0$ とすると、図 2 のようになる。粒子流内では衝突による細かいランダムな動きを繰り返しながら、全体として下流に流れていく (図 3)。ランダムな動きの速さはその深さでの粒子の平均速度 v に比例するとする。

- (2-1) ある深さ z にある、直径 D の粒子 (図 4) に真上から単位時間当りに衝突する粒子の鉛直成分の全運動量と真下から単位時間当りに衝突する粒子の鉛直成分の全運動量の和を求め、微分形式に改めた式を書け。ただし、周りから衝突してくる粒子は実際には様々な大きさの粒子であると考えられるが、どの深さでも等しい平均の質量をもつとせよ。また、必要なら適当に比例定数を一つにまとめて a とせよ。(深さの変数 z は鉛直上向きを正とし、比例定数 a は正の値であるとせよ)
 - (2-2) 前問で答えた式が上の現象を説明するためには、式に含まれる項にどのような条件が課せられるべきか、理由を簡潔に述べるとともに、示せ。
 - (2-3) 前問の関係が至る所で成り立つとして、 $v \rightarrow 0$ となる場所での dv/dz を考え、深さに対する速度分布の予想される概観を図示せよ。ただし、縦軸を z 、横軸を速度とせよ。また、グラフの特徴を、流体 (連続体の流れ) の速度分布と比較し、類似点もしくは相違点を簡潔に述べよ。
- (3) 土石流を再現し、以上の考察の検証をするためにどのような実験が考えられるか。実験に用いる試料や装置の物質名 (もしくは材料の名称)、大きさ、および、何をどういう方法で観察・測定するかを具体的に書くこと。
 - (4) 土石流の主要な原因である山崩れは風化岩屑や基板岩の一部が急激には崩落する現象である。一方、(狭義の) 地すべりは傾斜の緩い明瞭なすべり面に沿って土塊がゆっくりと移動する現象である。山崩れが多発する場所と地すべりが多発する場所ではどのような点が異なると考えられるか。

注意：問題 B6-b を選択するものには、本図の写真版を配布するので、申し出ること。

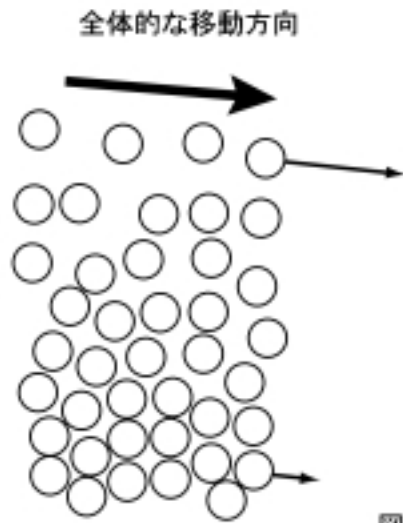


図 1

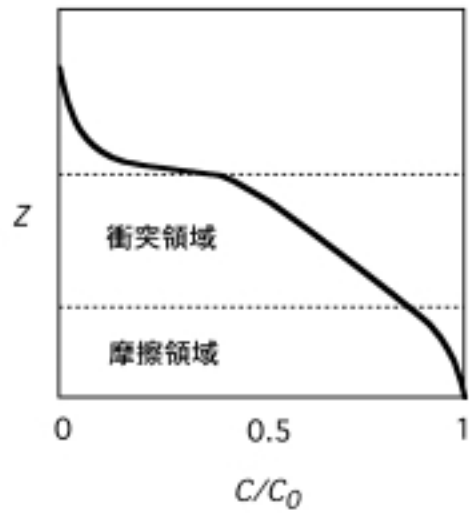


図 2

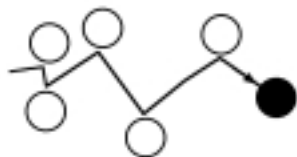


図 3

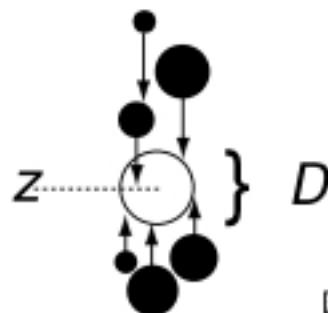


図 4