大学院前期 (修士) 課程（物理学専攻、宇宙地球科学専攻）入試問題

物 理 学 A

（平成 13 年 8 月）

A1 から A4 までのすべての問に解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

A1 (力学)

一様密度 ρ で半径 R の静止した球を考える。ニュートンの重力定数を G として以下の設問に答えよ。

(1) この球が単位質量に対して及ぼす重力ポテンシャルを、球の中心 O からの距離 r の関数として、$0 < r \leq R$ と $R < r$ のそれぞれの場合について求めよ。

(2) この球の表面上に相異なる二点 A, B をとる。すると線分 AB は球の内部を貫通する。いま、点 A と点 B を結ぶ細いトンネルをこの線分に沿って掘ったとする。このとき、トンネル AB 内を動く質量 m の質点のラグランジアンを、AB の中点 C からの距離 x を変数として求めよ。ただし線分 OC の長さを l とする。また、トンネルと質点の間には摩擦はないものとし、トンネルは十分細いので設問 **(1)** で求めたポテンシャルの計算がそのまま適用できるものとせよ。

(3) この質点の運動方程式を求めよ。

(4) 点 A を初速度 0 で出発したとき、この質点の運動周期を求めよ。

(5) 地球をこのような球で近似することにしよう。すなわち、密度は一様であると見なし、自転を無視する。点 A を大阪、点 B を東京としたとき、大阪を初速度ゼロで出発した質点がこのトンネルを通って東京に着くのは何分後か。地球の半径を 6.4×10^3 km とし、地表における重力加速度を $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ として計算せよ。

A2　(電磁気学)

(1) 子供がシャボン玉を作って遊んでいる。シャボン玉を半径 a の導体球殻と仮定して以下の設問に答えよ。なお無限遠の電位をゼロとして大地などの鏡像電荷の影響は考えなくてよい。

(1-1) 球殻が帯電すると、その電位は V となった。球殻の持つ電荷量 q を a、V で表せ。

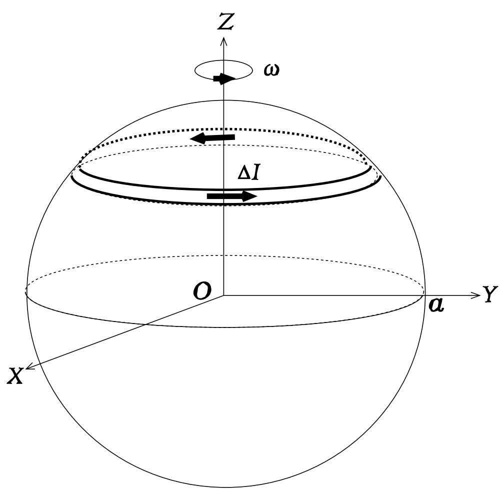
(1-2) このシャボン玉が破裂して水滴となった。ここでは電荷 q も物質も損失なしに中空でない導体球となったと考えよう。シャボン玉の厚みを p とし、水滴の静電容量を考えてその電位変化を求めよ。

(2) 正の電荷 q を持つ半径 a の導体球殻が、図のように球の中心 O を通る Z 軸のまわりに角速度 $\omega = \omega_0$ (ω_0：定数) で回転をはじめた。球面とともに回転する電荷を電流と考えて、それが球中心に作る磁束密度を求めたい。なお回転による変形と電荷の移動は考慮しなくてよい。

(2-1) 球面上に XY 平面に平行で、その中心を座標 $(0, 0, z)$ とする細いリング状部分（図に太い矢印で示した）を考える。ここを流れる円電流 ΔI が球殻中心に作る磁束密度を求めよ。

(2-2) 設問 (2-1) を利用して、この回転する球殻の中心における磁束密度 B_{c} を求めよ。

(3) 次に設問 (2) の球殻が $\omega = \omega_0 + kt$ (t：時間) で増加する角速度で回転するものとする。球の中心部に Z 軸と直交する半径 r の微小円面を考える。ここで r は a と比べて十分小さく、($r \ll a$) その中の磁束密度 B は均一と考えてよい。この微小円内における誘導起電力を求めよ。



A3　(熱統計)

相互作用をしていない２個の同種粒子からなる系が、図１のように温度 T の熱浴（熱源）と接触している。それぞれの粒子は、図２に示したような、エネルギーが $0, \varepsilon, 2\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ の一粒子量子状態のみをとるものとする。このとき以下の設問に答えよ。解は T を使わず、β（$= 1/kT$、k はボルツマン定数）を用いて表せ。

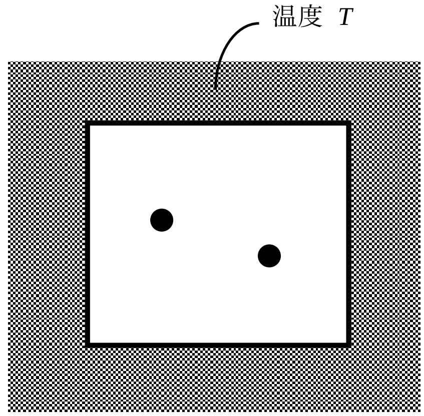


図１

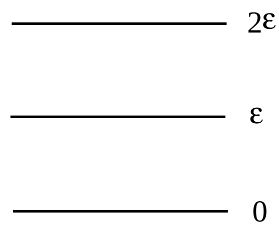


図２
１粒子量子状態

(1) はじめに、粒子が互いに識別できる場合を考える。

(1-1) ２粒子系のエネルギー準位を図示せよ。各準位にはエネルギーの値と縮退度（多重度）を記入すること。

(1-2) ２粒子系の分配関数（状態和）Z を求めよ。

(2) 粒子がボソンの場合に、２粒子系の平均エネルギー $\langle E \rangle_{\mathrm{B}}$ を求めよ。

(3) 粒子がフェルミオンの場合に、２粒子系の平均エネルギー $\langle E \rangle_{\mathrm{F}}$ を求めよ。

(4) $\varepsilon \gg kT = 1/\beta$ のとき、上で求めた $\langle E \rangle_{\mathrm{B}}$ と $\langle E \rangle_{\mathrm{F}}$ はそれぞれいくらになるか。この結果を物理的に説明せよ。

(5) エネルギー ε は一般に系の体積の関数になっている。系の体積を減少させるとき、図２の一粒子量子状態のエネルギー準位にはどのような変化が現れるか。　理由をあげて 下の選択肢から正しいものを選べ。

(a) 準位の間隔が広くなる。　(b) 準位の間隔が狭くなる。　(c) 一番上の準位だけが下がる。　(d) 一番下の準位だけが上がる。　(e) どれでもない。

A4　(量子力学)

次のハミルトニアンで記述される系を考える。

$$H_0 \;=\; D\,l_z^2 \;+\; E\,(l_x^2 \;-\; l_y^2)$$

ただし、l_x, l_y, l_z は軌道角運動量演算子を表し、この系の軌道角運動量の大きさ l は 1 とする。H_0 の固有関数は $l=1$ の独立な状態関数

$$\psi_{+1} \;\equiv\; \psi_{l=1,m=1},\quad \psi_0 \;\equiv\; \psi_{l=1,m=0},\quad \psi_{-1} \;\equiv\; \psi_{l=1,m=-1} \qquad (m \text{ は軌道角運動量の } z \text{ 成分})$$

の線型結合で表されるはずであることに注意して以下の設問に答えよ。ただし角運動量の昇降演算子 $l_\pm \equiv l_x \pm i\,l_y$ の等式

$$l_\pm\;\psi_{lm} \;=\; \sqrt{(l \mp m)\,(l \pm m + 1)}\;\psi_{l,m\pm1}$$

を用いてよい。

(1) H_0 の 3 つの固有関数のうちで $\psi_c \equiv \psi_0$ は単独で H_0 の固有関数であることを示せ。またその固有値 $E_c^{(0)}$ はいくらか。

(2) H_0 の残る 2 つの固有関数 ψ_a, ψ_b を規格化された形で求めよ。また対応する固有値 $E_a^{(0)}, E_b^{(0)}$ はいくらか。

(3) 次に、H_0 に外部磁場による摂動 $H_1 = \gamma\,l_z$ が加わったとする。このとき、状態 ψ_a, ψ_b, ψ_c のエネルギー変化を γ の 1 次の摂動の範囲で求めよ。また γ の 2 次の摂動の範囲ではどうなるか。

(4) 設問 (1)(2) の ψ_a, ψ_b, ψ_c を規格直交基底とする全ハミルトニアン $H = H_0 + H_1$ の行列表現を求めよ。

(5) 設問 (4) のハミルトニアン行列を対角化して H のエネルギー固有値を正確に求めよ。また得られた答えを設問 (3) の 2 次の摂動論を用いたものと比較せよ。