

物理学 A

（平成14年8月）

A1 から A4 までのすべての問に解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

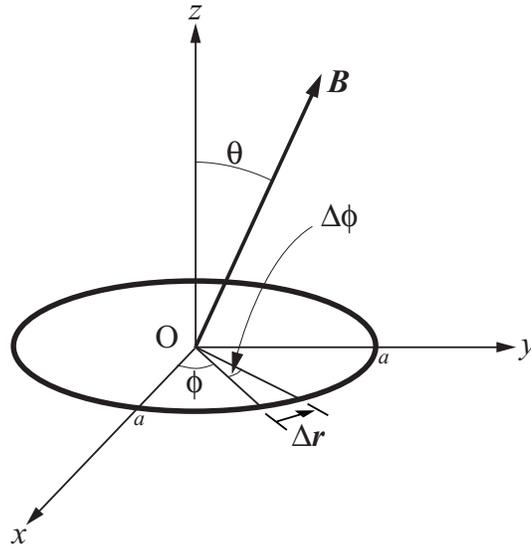
A1 質量  $m_1$  と  $m_2$  の二つの原子がポテンシャル

$$V(r) = \frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^4}$$

で相互作用を及ぼしあっている。 $a$  および  $b$  は正の定数であり、 $r$  は二つの原子の間の距離である。二つの原子からなる系の相対運動を古典力学の範囲で考えよう。

- (1) 換算質量  $\mu$  はどのような表式になるか。以降の問の解答には  $\mu$  を使ってよい。
- (2) 二つの原子が上のポテンシャルで分子を作って静止しているときの原子間の相対距離  $r_0$  と分子のエネルギーを求めよ。
- (3) 分子が回転していないとき、(2) で求めた距離  $r_0$  の付近での微小振動の運動方程式とその角振動数を求めよ。
- (4) 分子が、二つの原子を結ぶ直線に垂直で質量中心をとる軸のまわりに、相対距離を一定として回転するものとする。回転角を  $\theta$  として、相対運動の角運動量を表せ。分子が解離せずに（二つの原子が無限に離れないで）束縛状態を保つことのできる角運動量の最大値を求めよ。また、このときの相対距離  $r_1$  を求めよ。

**A2** 一様な磁束密度  $B$  の中で、断面積の無視できる細い円環が、中心軸（円環の中心  $O$  を通り、円環の面に垂直な軸）のまわりに一定の大きさの角速度  $\omega$  で回転している。回転の方向は、 $z$  軸正方向から見て反時計回りであるとする。円環上には正の電荷が線密度  $\rho$  で一様に分布している。電荷は円環上に固定されているとして、以下の問に答えよ。ただし円環の半径を  $a$  とし、 $B$  の  $x, y, z$  成分は下図の座標系で  $B = (0, B_y, B_z)$  であるものとする。



最初、円環の中心軸は  $z$  軸に一致するように固定されているものとする。

- (1) 円環の回転により発生する円電流  $i$  の大きさを求めよ。
- (2) 円環が  $xy$  平面内で回転している時、 $x$  軸からの角度が  $\phi$  と  $\phi + \Delta\phi$  に挟まれた円環の微小部分  $\Delta r$  に働くローレンツ力の  $x, y, z$  成分を求めよ。ただし電流は  $i$  で表すこと。
- (3) 円環に働くローレンツ力により、円環の中心  $O$  の回りに生じるトルク  $N$  の  $x, y, z$  成分を求めよ。
- (4) (3) で発生した  $N$  は、点  $O$  に置いた磁気双極子モーメント  $m$  に働くトルクと同等である。 $m$  の  $x, y, z$  成分を求めよ。次に、円環の中心軸が任意の方向に自由に向くように設定する。このときも常に  $m = \gamma J$  の関係が満たされており（ただし  $\gamma$  は定数）、したがって円環の角運動量  $J$  はトルク  $N$  と直交しているものとする。
- (5)  $m$  は  $B$  の作用により周期運動をする。どのような運動かを簡潔に述べ、その周期  $T$  を求めよ。ただし  $B$  と  $z$  軸のなす角度を  $\theta$  とする。

**A3** 2種類 ( A, B ) の気体分子が格子点に吸着される問題を考える。各格子点には次の3つの状態が許されるものとする： 0 ( 気体分子が吸着していない )、1 ( A 種分子1つによって占有されている )、2 ( B 種分子1つによって占有されている )。各格子点  $i$  上の自由度として、上記3つの値をとる変数  $\sigma_i$  ( $\sigma_i = 0, 1, 2$ ) を導入する。占有状態は非占有状態に比べて  $v$  ( $v > 0$ ) だけエネルギーが下がるとし、この系のハミルトニアンを

$$\mathcal{H}_N = -v \sum_{i=1}^N [\delta(\sigma_i, 1) + \delta(\sigma_i, 2)] \quad (\text{A})$$

と書く。ただし、 $N$  は格子点数、 $\delta(i, j)$  はクロネッカーデルタである。この格子気体系は温度  $T$  の熱浴中にあるとし、必要に応じて逆温度  $\beta = 1/(k_B T)$  ( $k_B$  : ボルツマン定数) を用いてよい。以下の各問に答えよ。

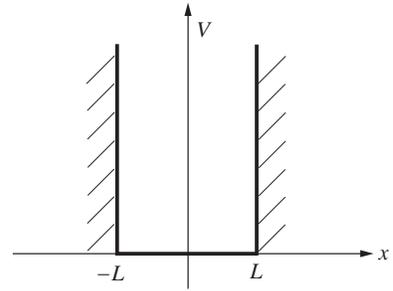
はじめに、分子間相互作用がない場合を考える。

- (1) 自由エネルギー  $F$ 、内部エネルギー  $E$  の具体的表式を求めよ。
- (2) 比熱の具体的表式を求めよ。また、その温度依存性のおおよその形を描け。
- (3) 気体密度 ( 1 格子点当たりの占有数期待値 ) を  $\rho$  とする。 $\rho$  の具体的表式、および、その温度依存性のおおよその形を示せ。

次に、同種気体分子間に、距離によらず一定の相互作用ポテンシャルが働く場合を考える。つまり、相互作用定数を  $J$  とし、すべての同種気体分子ペアが  $-J/N$  のエネルギーをもつとする。この相互作用エネルギーと (A) 式とを加えたものが系の全エネルギーとなる。

- (4) A 種分子で占有された格子点数を  $N_A$ 、B 種分子で占有された格子点数を  $N_B$  とする。 $N_A$  および  $N_B$  を固定した状態空間での、エネルギー  $E$  およびエントロピー  $S$  の表式を求めよ。
- (5) 分子種密度  $\rho_A \equiv N_A/N$  および  $\rho_B \equiv N_B/N$  を導入する。これらの密度を一定に保ったままでの熱力学的極限  $N \rightarrow \infty$  を考える。この極限での 1 格子点当たりの自由エネルギー  $f$  を  $\rho_A$ 、 $\rho_B$  の関数として求めよ。

A4 下図に示すポテンシャル  $V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq L, \\ \infty, & |x| > L \end{cases}$



の中を1次元的に運動している粒子を量子力学で考える。

(1) まず内部自由度を持たない質量  $m$  の1粒子を考える。

(1-1) 1次元の任意のポテンシャル  $U(x)$  の中で運動する場合のシュレディンガー方程式を書き、束縛状態がある場合、それらの状態には縮退がないことを示せ。さらにこのことを用いて、図のポテンシャルの中で運動する粒子を記述する固有関数は、座標の反転のもとで符号を変えるか変えないかのどちらかであることを示せ。

(1-2) 図のポテンシャルの場合にシュレディンガー方程式を解くことにより、規格化された固有関数と固有値を求め、それらと前問の関係について述べよ。

(1-3) 左側のポテンシャルの壁が原点にあったとする。このとき前問で求めた固有関数のうち許されるものを選び出せ。

(2) 図のポテンシャル中をスピン  $1/2$ 、質量  $m$  の同一種類のフェルミオンが2つ運動している場合を考える。

(2-1) 2粒子の間に力は働かないとして、それらの状態がスピン3重項状態になっているとき、基底状態の波動関数とエネルギーを求めよ。

(2-2) スピン1重項状態になっているとき、(2-1)と同じ問いに答えよ。

(2-3) 2粒子がポテンシャル  $V'(x_1, x_2) = \lambda\delta(x_1 - x_2)$  で相互作用しているとき、前問(2-1), (2-2)のエネルギーが1次の摂動でどう変わるか求めよ。ただし  $\lambda$  は定数である。

物理学 B

（平成14年8月）

B1 から B6 までの 6 問の中から 3 問を選択し解答せよ。ただし理論の志願者は B1、B2、B3 から 2 問以上選択することが必要である。解答用紙の問題番号の欄に選択した問題の番号を書くこと。

B1

(1) 原子番号  $Z$  の原子が電離し、一個だけ電子が残った状態を考える。この電子は核によるクーロン力で束縛されている。この電子に対するシュレディンガー方程式を球座標  $(r, \theta, \phi)$  で書き下した時、その解  $\varphi$  が球面調和関数  $Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$  を用いて

$$\varphi = R(r) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = \frac{\chi(r)}{r} Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

と書けると仮定し、以下の問に答えよ。

(1-1) 関数  $\chi(r)$  に対する微分方程式を導出せよ。その際、以下の関係式を利用せよ。ただし、第二の関係は演算子の  $r$  依存の部分を示す。

$$\nabla^2 Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_{\ell, m}(\theta, \phi), (\nabla^2)_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

(1-2)  $\ell = 0$  と  $1$  の場合の波動関数  $\chi(r)$  に対する実効的ポテンシャルのおおよその形を図示せよ。また、同じ負の値のエネルギーの固有状態があるとして、それぞれの  $\chi(r)$  のおおよその形を描け。さらに、どちらの場合が電子の分布関数がより広がっているか述べよ。

(1-3) いま、K 殻（主量子数  $n = 1$  状態）に 2 個の電子があり、L 殻（主量子数  $n = 2$  状態）に 1 個の電子が残されたイオンを考える。この場合、L 殻電子の固有エネルギーは  $2s$  ( $\ell = 0$  状態) と  $2p$  ( $\ell = 1$  状態) とで異なる。K 殻にある 2 個の電子による電荷遮蔽（しゃへい）の効果により、 $2s$  と  $2p$  の固有エネルギーはどちらが高くなるか理由を述べながら説明せよ。

(2) 電子のスピン軌道相互作用のハミルトニアンは

$$H' = \zeta(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{s})$$

と書ける。ここで、 $\boldsymbol{s}$  はスピン角運動量、 $\boldsymbol{l}$  は軌道角運動量、 $\zeta$  は比例係数である。この相互作用によって  $2p$  状態はさらに分離する。 $2p$  のエネルギー準位は何個に分離し、それぞれの分離した状態には何個の固有状態が縮退しているか求めよ。また、 $\zeta$  が定数であると考え、この相互作用を考慮しなかった時のエネルギーからの変化量をそれぞれの状態について求めよ。

**B2** 面積  $S$  の平面内で自由運動する  $N$  個の電子からなる 2 次元系を考える。以下の問に答えよ。

(1) 十分高温での電子 1 個あたりの定積比熱  $c_v$  はいくらか。

(2) この電子系の状態密度  $D(E) = dN/dE$  は定数  $D_0$  に等しいという。 $D_0$  を電子の質量  $m$  などで表せ。ただし  $E$  は電子 1 個あたりのエネルギーである。また Fermi 波数  $k_F$  を面密度  $n = N/S$  などで表せ。

(3) 一般の温度  $T$  で化学ポテンシャル  $\mu$  を定める条件を示せ。また低温で  $\mu$  は  $T$  に殆ど依存しないことを示せ。必要なら公式

$$\frac{1}{1 + e^x} = -\frac{d}{dx} \log(1 + e^{-x})$$

を用いても良い。

(4) 十分低温での電子 1 個あたりの定積比熱  $c_v$  の温度依存性を求めよ。必要なら

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2}{\cosh^2 x} = \frac{\pi^2}{6}$$

を用いても良い。また温度全域での  $c_v$  を図示せよ。

(5) 次に磁束密度  $B$  を加える。このとき電子の磁場によるエネルギー変化  $\Delta E$  はいくらか。ただし、スピン角運動量の磁場方向の成分を  $\hbar s_3$  とし Bohr 磁子を  $\beta$  (MKSA 単位系では  $|e|\hbar/2m$ 、cgs 単位系では  $|e|\hbar/2mc$ ) とせよ。

(6) 磁束密度  $B$  のもとで、電子 1 個当りのスピンによる磁気モーメントの期待値  $p$  を絶対零度のときについて求めよ。

## B3

(1) ベッセル関数を定義するのに、積分表示を用いると便利ことがある：

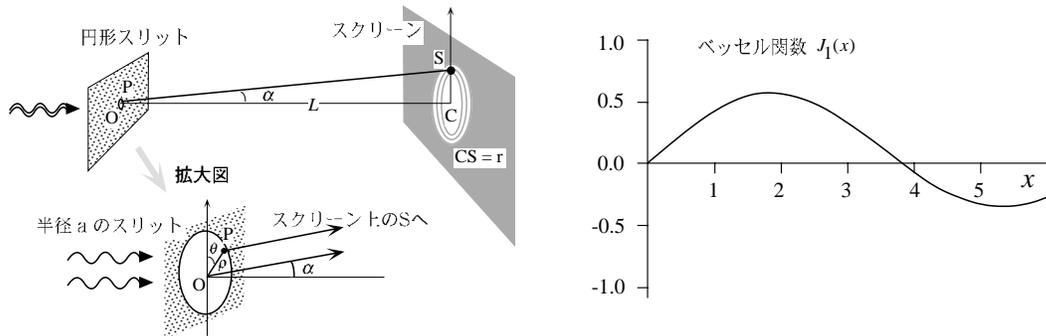
$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$$

(1-1) 次の漸化式と微分関係式を示せ。

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2 \frac{d}{dx} J_n(x), \quad \frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$

(1-2) 1 次のベッセル関数について、 $x$  が小さいとき  $J_1(x) \sim kx$  と近似できることを示し、また係数  $k$  を求めよ。

(2) ベッセル関数の応用として、光が円形スリットを通過してできるフラウンホーファー回折を考えよう。波長  $\lambda$  の光が（平面波とする）下図のような半径  $a$  の円形スリットに垂直に入射すると、その先  $L$  の距離におかれた、スリット面に平行なスクリーン上に回折像が映る。スリットを中心を  $O$ 、スクリーンの中心を  $C$ （ $OC$  はスリット、スクリーン両面に垂直）とし、また、 $L$  は  $a$  や回折像の大きさに比べ十分に大きいものとする。



(2-1) ホイヘンスの原理によれば、スクリーン上の点  $S$  ( $CS = r$  とする) では、スリット面の各点  $P$  から生じた光が互いに干渉すると考えられる。図の  $OS$ ,  $PS$  の行路差を  $d$  とすれば、位相差は  $2\pi d/\lambda$  である。これらのことから、 $S$  における光の振幅は

$$f(r) = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \cos(b\rho \sin \theta), \quad b = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \sim \frac{2\pi r}{L\lambda}$$

に比例することを示せ。ここに、 $\alpha$  はスリットから  $S$  に向かう角度である（図参照）。

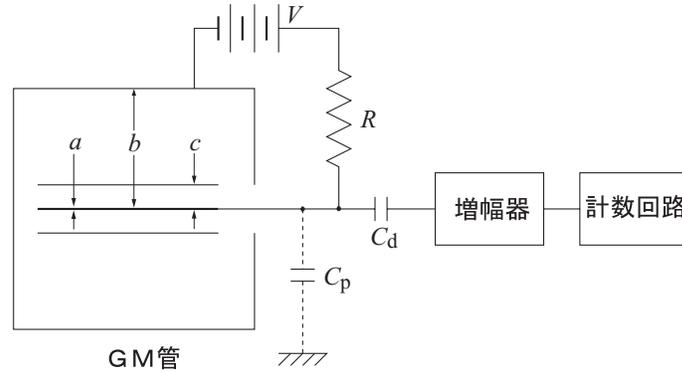
(2-2)  $f(r) = 2\pi \int_0^a J_0(b\rho) \rho d\rho$  を示し、(1-1) の関係式を使ってこの積分を行え。

(2-3)  $J_1(x)$  のグラフを参考にして、スクリーン上における光の強度を原点  $C$  からの距離  $r$  の関数としてそのおおよその形をかけ。

(2-4) スリットの半径を  $a = 0.1$  mm、スクリーンまでの距離を  $L = 2$  m とする。波長が  $\lambda = 6 \times 10^{-7}$  m の光の場合、もっとも内側に現れる暗い円の半径を計算せよ。

B4 放電管の一種で放射線検出に利用されるガイガー計数管 (GM管) につき以下の問いに答えよ。

(1) 下図に示すGM管は同心円筒で、半径  $a$  の芯線が陽極を、半径  $b$  の外円筒が陰極面を構成し、管内には100分の1気圧程度のガスが封じ込まれている。陽極と陰極間には高電圧  $V$  が印加されている。陽極中心から距離  $r$  における電場を求めよ。なおガスの誘電率は無視してよい。



(2)  $\beta$  線がGM管に入るとその通路に沿い管内のガスを電離し電子と正イオンを生成する。この電子と正イオンはそれぞれ陽極及び陰極に向い加速され再びガスを電離する。こうして生成された電子は陽極線付近の強い電場のため加速され頻りに電離を起し多量の電子と正イオンを生成するなだれ現象を起す。この現象に伴い中心電極に沿って放電が起る。その結果生成される正イオンは陽極芯線に沿い筒状に一様に分布し、なだれ現象はこの正イオンのために止む。その理由を陽極付近の電場の形を、電子なだれが無い場合の電場と比較しつつ定性的に図示し説明せよ。なお放電で生成された正イオンは半径  $c$  の所に無視できる厚さで筒状に分布しているとみなせ。

(3)  $\beta$  線の強度は上記放電により生成された正イオンの陰極に向かう移動を電圧パルスとして回路で取りだし計数してわかる。しかしGM管は正イオンが陰極に到達するまでは次の  $\beta$  線が入射してきても応答しない時間を持つ。この時間を不感時間と呼ぶ。今不感時間  $\tau$  を持つGM管で計測された  $\beta$  線の計数率が  $m$  である時、この  $\beta$  線の真の計数率は幾らかを求めよ。なお  $\tau < 1/m$  とする。

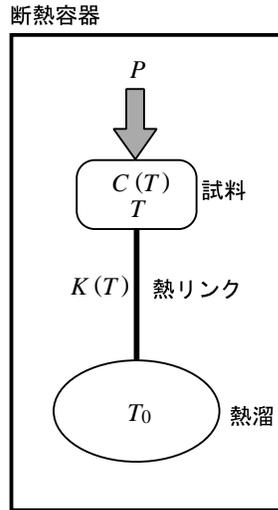
(4) GM管は宇宙線に対してもパルスを生じ、それらは  $\beta$  線の計測の際にバックグラウンドとなる。今  $\beta$  線を同一時間計測したところ、線源がある時200カウントで無い時が100カウントであった。この際、 $\beta$  線源の強度は幾らの統計精度で求まるかを計算せよ。なお、不感時間の影響は考えなくてよい。またGM管で測定される  $\beta$  線及び宇宙線の計数はポアソン分布に従うものとする。

(5) 図のGM管計数回路において抵抗  $R$ 、コンデンサー  $C_d$  及び  $C_p$  はそれぞれ大切な役目を持っている。ここで  $C_p$  は浮遊容量と呼ばれ検出器自体の静電容量と増幅器系入力部分の静電容量等の和で与えられる。コンデンサー  $C_d$  の役割について述べなさい。この回路で入力時定数  $RC_p$  を正イオンが陰極に到達する所要時間 (1ミリ秒とする) より長くしたい。  $C_p$  が10 pF (ピコファラッド) の時  $R$  は幾らにすればよいか計算せよ。

B5 物質の比熱を温度の関数として測定する実験法として、緩和法と呼ばれる方法がある。

この方法について述べた以下の説明の中の間に答えよ。

下図に模式的に示したように、熱容量  $C(T)$  ( $T$  は温度) の試料と熱溜 (金属ブロック) が熱リンク (細い金属抵抗線) で熱的に弱く結合した系が、断熱容器の中に置かれ、試料と熱溜には、それぞれ温度計とヒーターが取り付けられており、熱溜の温度は、任意の温度で一定に保つことが出来る。



(1) 物質の比熱、物体の熱容量、物体のもつ内部エネルギー、の違い (または、それらの間の関係) を簡潔に説明せよ。

(2) 図で、まず、熱溜の温度を  $T_0$  で一定に保つ。試料にパワー (単位時間あたりの熱入力) を加えない状態を十分長い時間保ち、系全体の温度が  $T_0$  で均一になった後、時刻  $t = 0$  から一定値のパワー  $P$  を連続的に入力する。このパワーは試料の温度の上昇 (即ち試料の持つ内部エネルギーの増加) と、リンクを通過しての熱溜への流出とに消費される。この熱流のバランスを表現する、温度  $T$  と  $t$  に関する微分方程式を求めよ。ただし、試料の温度  $T$  と熱溜の温度の差は小さく、熱リンク全体の熱コンダクタンスは  $K(T)$  と書けるとする。また、試料内部での熱の拡散は熱リンクの熱伝導に比べて十分に早く、熱リンクの金属線は細くて、その熱容量は無視できるとする。

(3)  $T - T_0 \equiv \Delta T$  が十分小さいなら、 $C(T)$ 、 $K(T)$  をそれぞれ  $C(T_0)$ 、 $K(T_0)$  で置き換えてよい。このとき  $\Delta T$  の満たす微分方程式を導き、その解を求めよ。

(4) 試料の温度変化がある程度ゆるやかになった後、 $t = t_0$  で入力を切ったとする。その後の試料の温度変化を求めよ。

(5) これらの結果を用いて、実験的に熱容量  $C(T_0)$  とコンダクタンス  $K(T_0)$  を独立に求めることが出来る。その手順を考察し、述べよ。

**B6** 地球科学における「プレートテクトニクス」についての以下の間に答えよ。

- (1) 「プレートテクトニクス」とはどのような概念か、3行程度で簡単に説明せよ。
- (2) プレートの動きはどのようなことからわかるか、各1行程度で証拠となるものを2つ挙げよ。
- (3) 中央海嶺で生じたプレートは、冷却するにつれ、その厚さが  $\sqrt{t}$  ( $t$ は時間) に比例して増大することがわかっている。それを以下の簡単なモデルによって考えよう。
- (3-1) 海底で観測される熱流量  $q_s$  (鉛直方向上向きに単位面積、単位時間当りに流れる熱量) は、プレート内の熱伝導によって表されるとして、その式を示せ。ただし、熱伝導率を  $K$  とし、プレートの厚さの上向き方向に  $z$  軸をとり、プレート内の  $z$  における温度を  $T(z)$  とせよ。
- (3-2) プレートの底では、アセノスフェア (部分溶融した領域) 内の物質が固化することによりプレートに付加して、プレートは厚くなる。その時に潜熱が生じる。これが、海底で観測される熱流量  $q_s$  であるとして、プレートの厚さの時間変化を用いて  $q_s$  を表せ。ただし、アセノスフェア内の物質の単位質量当たりの潜熱を  $L$ 、密度を  $\rho$ 、プレートの厚さを  $\ell$  とせよ。
- (3-3) プレートの底での温度を  $T_b$ 、海底での温度を  $T_s$  とし、プレート内の温度勾配は一様として、上記の2式から  $\ell$  が  $\sqrt{t}$  に比例することを示せ。
- (3-4)  $K = 0.008 \text{ cal}/(\text{cm}\cdot\text{s}\cdot\text{deg})$ 、 $T_b = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$ 、 $T_s = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ 、 $\rho = 3.65 \text{ g}/\text{cm}^3$ 、 $L = 240 \text{ cal}/\text{g}$  として、 $t$  の単位を百万年にとった時、プレートの厚さ  $\ell$  (単位 km) と  $\sqrt{t}$  の比例係数はいくらになるか。 $\sqrt{10} \simeq 3.2$  を用いて、有効数字2桁で答えよ。