

物理学

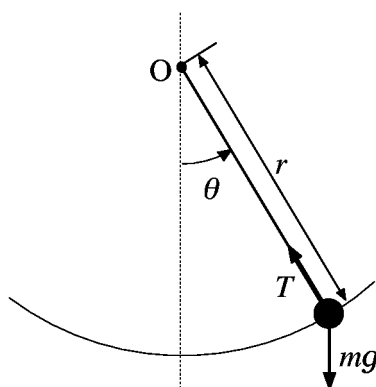
（平成16年8月31日）

1 から 4 までのすべての問題に解答せよ。解答用紙は問題ごとに一枚とし、それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと。

問題 1

A君はブランコをこぐのが好きだ。小さい頃は父親に押しもらったが、大きくなると自分ひとりでこぐようになった。しかし、学校で勉強すればするほど、どうして自分ひとりでブランコがこげるのかわからなくなってしまった。重力による位置のエネルギーは保存力であり、重心を上下させただけでは仕事にならない。また、外力がなければ、一周後の角運動量は同じ値になるような気がする。そこで、きちんと考えることにした。

図示したように、ブランコの支点を原点Oにとり、ブランコ自体の質量は無視して、こぎ手を質量 m の質点とした。O点から質点までの距離（＝ブランコの長さ）を r とし、こぎ手の運動による重心の位置の変化は r の変化で表すことにする。また、鉛直線から測った振れ角を θ とし、 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ とする。重力加速度を g とする。



A君は、まず、ブランコが質点に与える力（張力）を T として、動径方向と回転方向の運動方程式が以下のようなことを導いた。

$$m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) = -T + mg \cos \theta \quad (1)$$

$$m(2\dot{\theta}\dot{r} + \ddot{\theta}r) = -mg \sin \theta \quad (2)$$

ここで、

$$\frac{dr}{dt} \equiv \dot{r}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} \equiv \ddot{r}, \quad \frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} \equiv \ddot{\theta}$$

である。以下の問に答えよ。

- (1) A君は、式(2)を見て次のことに気が付いた。振れ角が小さいとして $\sin \theta \approx \theta$ と近似して変形すると、以下ようになる。

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}}{r}\dot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0 \quad . \quad (3)$$

また、ブランコの長さ r は、全体の長さに対して1周期の間にわずかしき変化しないとして、 $r \approx r_0$ と近似すると、以下ようになる。

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}}{r_0}\dot{\theta} + \frac{g}{r_0}\theta = 0 \quad . \quad (4)$$

しかし、このままではまだ解けないので、まず、 r が全く変化しない場合を解くことにした。 θ の時間変化を示せ。ただし時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ とする。

- (2) 次に、ブランコの長さ r を一定の速度でゆっくりと変化させて $\dot{r} = v_0$ とした。式(4)を解いて、 θ の時間変化の一般解を示せ。

ブランコの長さ r をおなじ方向に変化させ続けることはできない。そこで、ブランコをこぐ方法を、上記の近似を用いなくて考えてみる。

- (3) ブランコの角運動量は、最大振れ角の時に一瞬ゼロになるが、それ以外では θ に依存して大きさと符号が変化する。まず、ブランコの長さ r が θ の一価関数 $r(\theta)$ で与えられる場合を考える。すなわち、同じ θ に対して行きも帰りも同じ r が与えられるとする。ただし、 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ とする。このとき、角運動量 L の二乗 $Q = L^2$ も θ の一価関数 $Q(\theta)$ となることを示せ。

このことから、任意の θ における行きと帰りの角運動量の絶対値は等しく、1周期後は符号も含めて等しくなる。したがって、ブランコをこぐためには、少なくとも、行きと帰りでは r が異なっていないてはならない。

次に、具体的にブランコをこぐ方法を考える。ブランコの長さを変化させているとき、張力 T が質点に作用して行う仕事は、単位時間当たり $-T\dot{r}$ で与えられる。1周期のあいだに行うこの仕事の積分量が正のときは、ブランコをこぐことができる。以下ではこのことに注意して答えよ。

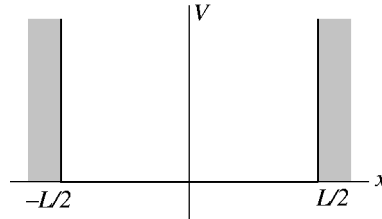
- (4) ブランコの長さ r を一定にしているとき、張力 T は、おおよそどういうタイミングで大きくなったり小さくなったりするか説明せよ。

- (5) 次に、 r を変化させることを考えよう。(4)を参照して、 r をおおよそどのようなタイミングで増加させ ($\dot{r} > 0$)、また、おおよそどのようなタイミングで減少させれば ($\dot{r} < 0$)、1周期の間に効率よく仕事をしてブランコをより振らせることができるのか、理由を付けて示せ。また、そのタイミングは1周期あたり、それぞれ何回存在するか示せ。

問題 2

$x = \pm L/2$ に高さ無限大のポテンシャルの壁が存在し、その2つのポテンシャル障壁の間に閉じこめられた電子の1次元の運動について考える。電子の波動関数を $\psi(x)$ 、質量を m 、電荷を $-e$ とし、電子のスピンは無視して以下の問いに答えよ。

(1) $|x| < L/2$ は自由空間として、電子に対する定常状態のシュレーディンガー方程式を書き、エネルギー固有値および規格化された波動関数を求めよ。固有値、波動関数は、正の整数 n (基底状態は $n=1$) を含んだ形で表せ。また、規格化のために必要であれば下記 (次ページ) の積分公式を利用してよい。



(2) 電子の定常状態について座標 x の期待値、 $\langle x \rangle$ を任意の n について求めよ。

摂動 $\lambda H'$ が電子に作用した場合を考えよう。このとき、シュレーディンガー方程式は、無摂動系のハミルトニアンを H_0 として、

$$(H_0 + \lambda H')\psi_n = W_n \psi_n$$

と表せる。上記の問題のように縮退がないとき、波動関数 ψ_n 、エネルギー W_n をそれぞれ、

$$\begin{aligned}\psi_n &= \psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)} + \dots \\ W_n &= W_n^{(0)} + \lambda W_n^{(1)} + \lambda^2 W_n^{(2)} + \dots\end{aligned}$$

と λ の冪級数で展開する。すると、上式が変数 λ の任意の値に対して成り立つとすることにより、 ψ_n, W_n を、無摂動系の固有関数系 $\psi_k^{(0)}$ 、エネルギー固有値 $W_k^{(0)}$ と H' を用いて表わすことができる。これを縮退がない場合の摂動法とよび、 $\psi_n^{(1)}, W_n^{(1)}$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\psi_n^{(1)} &= \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle}{W_n^{(0)} - W_m^{(0)}} \psi_m^{(0)} \\ W_n^{(1)} &= \langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle\end{aligned}$$

(3) 一様な電場 E が x 軸の正の向きにかけられたとき、任意の n の状態について電子のエネルギーの変化 ΔW_n を、1次の摂動法を用いて求めよ。

(4) 一様な電場 E が x 軸の正の向きにかけられたとき、基底状態 ($n=1$) について電子の座標 x の期待値 $\langle x \rangle$ を1次の摂動法を用いて求めよ。ただし、基底状態と第1励起状態 ($n=2$) だけを考え、 $n=3$ 以上の状態は無視できるとする。また、必要であれば下記 (次ページ) の積分公式を利用してよい。

(5) 摂動ポテンシャルとして、 $\lambda H' = \varepsilon \delta(x - L/2N)$ (N は整数) が加えられたとき、電子のエネルギーの変化 ΔW_n を1次の摂動法を用いて求めよ。

(6) (5) で $N=2$ としたとき、 $n=2$ と $n=4$ の状態の ΔW_n を求めて比較し、大きな差のできる理由を述べよ。

積分公式

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\
 & = \begin{cases} 0 & n, m \ (n \neq m) \text{ とも偶数または奇数の場合} \\ \frac{L}{2} & n = m \text{ の場合} \\ \frac{L}{\pi} (-1)^{(m-n-1)/2} \left(\frac{1}{m-n} - \frac{(-1)^n}{m+n} \right) & \text{上記以外の場合} \end{cases}
 \end{aligned}$$

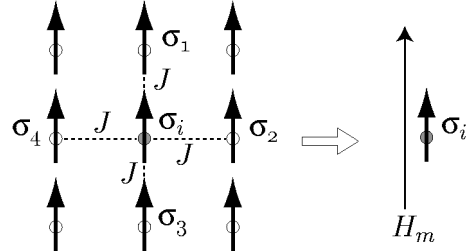
$$\begin{aligned}
 [2] \quad & \int_{-L/2}^{L/2} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\
 & = \begin{cases} 0 & n, m \ (n \neq m) \text{ とも偶数または奇数の場合} \\ \frac{L}{2} & n = m \text{ の場合} \\ \frac{L}{\pi} (-1)^{(m-n-1)/2} \left(\frac{1}{m-n} + \frac{(-1)^n}{m+n} \right) & \text{上記以外の場合} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [3] \quad & \int_{-L/2}^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\
 & = \begin{cases} \frac{(-1)^{(m+n)/2} L^2 n}{(m^2 - n^2) \pi} & n, m \ (n \neq m) \text{ とも偶数の場合} \\ -\frac{(-1)^{(m+n)/2} L^2 m}{(m^2 - n^2) \pi} & n, m \ (n \neq m) \text{ とも奇数の場合} \\ -\frac{4(-1)^{(m+n-1)/2} L^2 mn}{(m^2 - n^2)^2 \pi^2} & n \text{ が偶数、} m \text{ が奇数の場合} \\ \frac{2(-1)^{(m+n-1)/2} L^2 (m^2 + n^2)}{(m^2 - n^2)^2 \pi^2} & n \text{ が奇数、} m \text{ が偶数の場合} \\ -\frac{(-1)^n L^2}{4n\pi} & n = m \text{ の場合} \end{cases}
 \end{aligned}$$

問題 3

磁石（強磁性体）の簡単なモデルを統計力学を使って考察しよう。結晶の各原子（原子の数を N とする）は磁気モーメント（スピン）をもち、それらは上向きと下向きのいずれかの状態をとるものとする。各々のスピンの状態は ± 1 の値をとる変数 σ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) で指定される。結晶の隣り合うスピンの間には相互作用 J ($J > 0$) があり、隣り合ったスピンを平行にそろえようとする。外部磁場 H_{ex} によるゼーマン効果を含めた系のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - H_{ex} \sum_i \sigma_i \quad (\sigma_i = \pm 1)$$



となる。ここで $\sum_{\langle i,j \rangle}$ は隣接するスピンの組に関する和を意味する。ボルツマン定数を k として以下の問いに答えよ。

1. まず相互作用がない場合 ($J = 0$) を考えよう。この場合、スピンはゼーマン効果により磁場に平行になろうとする。このときの 1 原子当たりの磁化 $m = \langle \sigma_i \rangle$ を外部磁場 H_{ex} と温度 T を用いて表せ。ここで $\langle A \rangle$ は A の統計平均を表す。
2. 磁化 m は、上向きスピンの個数を N_+ 、下向きスピンの個数を N_- としたとき、 $m = (N_+ - N_-)/N$ と考えられる。このような配置の総数から 1 スピン当たりのエントロピー $s = S/N$ を m の関数として求めよ。ただし、 N, N_+, N_- が大きいとし、必要であれば $\log n! \simeq n \log n - n$ を用いよ。

次に外部磁場 H_{ex} は存在せず ($H_{ex} = 0$)、相互作用 J がある場合 ($J > 0$) を考えよう。このような相互作用をもつ多粒子系を厳密に扱うことは困難であるから、以下のような近似を考えよう。今、一つのスピンの注目し、他のスピンからの相互作用を平均的な磁場 H_m として考えよう。この様子を、二次元正方格子上的スピンを例に、上図に示した。 σ_i の相互作用エネルギーは、

$$-J(\sigma_1 \sigma_i + \sigma_2 \sigma_i + \dots + \sigma_z \sigma_i) \sim -zJm \sigma_i = -H_m \sigma_i$$

となり、隣接する原子の個数を z とすると、 H_m は zJm となることが分かる。（上図の例では $z = 4$ の場合を示している。）このように相互作用を平均的な磁場 H_m で置き換えることにより、この系を相互作用のないスピンが外部磁場中にある系と考えることができる。

3. 強磁性状態は、外部磁場 H_{ex} がない場合 ($H_{ex} = 0$) でもスピンの自発的に一方向に揃った状態、つまり $m \neq 0$ の状態である。この状態は低温で存在し、温度を上げていくとある温度 T_c で消失する ($m = 0$)。この温度 T_c を求めよ。
4. この系の自由エネルギー F は $F = E - TS$ として求めることができる。ここで E は内部エネルギーで $E = \langle \mathcal{H} \rangle$ である。 \mathcal{H} 中の全ての σ_i を平均値 m で置き換えることで、 E を直接求めることができる。相互作用の個数に注意して E を計算し、外部磁場がない場合 ($H_{ex} = 0$) の 1 スピン当たりの自由エネルギー $f = F/N$ を、 N が大きいとして、 m の関数として表せ。
5. 上で求めた温度 T_c の上下で、 $f(m) - f(0)$ を m の関数として、その概略を図示せよ。

問題 4

[1] N 個の粒子が有限の領域、有限のエネルギーで運動している。 i 番目の粒子の質量、座標ベクトル、運動量ベクトル、粒子に作用する力を、それぞれ、 m_i 、 \vec{r}_i 、 \vec{p}_i 、 \vec{F}_i 、とする。古典力学の運動方程式は $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$ である。ビリアル量を $B \equiv \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i$ として定義する。

(1-1) B を時間微分し、時間平均を計算することにより、粒子の持つ運動エネルギーの総和 $K = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i}$

は

$$2\overline{K} = -\overline{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i}$$

の関係をみだすことを証明せよ。ここで物理量 A の時間平均は $\overline{A} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A dt$ で定義される。

(1-2) 個々の粒子間には重力ポテンシャルのみが働いている。質量 m_i 、 m_j を持つ粒子間の距離を $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ 、重力定数を G としたとき、

$$2\overline{K} = -\overline{U} \quad , \quad U = -\sum_{i>j} G \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

となることを証明せよ。

[2] 量子力学では、位置、運動量、波動関数を $\vec{r} = (x, y, z)$ 、 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 、 $\psi(\vec{r}, t)$ としたとき、ビリアル量 $\vec{r} \cdot \vec{p}$ の期待値は $\langle \vec{r} \cdot \vec{p} \rangle \equiv \langle \psi | \vec{r} \cdot \vec{p} | \psi \rangle = \int \psi^* (\vec{r} \cdot \vec{p}) \psi dx dy dz$ で与えられる。ハミルトニアンを $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$ としたとき、その時間変化は、

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \vec{r} \cdot \vec{p} | \psi \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [\vec{r} \cdot \vec{p}, H] | \psi \rangle$$

と書ける。ここで、 $[A, B] = AB - BA$ である。

(2-1) x と p_x の交換関係を用い、

$$\begin{aligned} [xp_x, p_x^2] &= 2i\hbar p_x^2 \quad , \\ [xp_x, V] &= -i\hbar x \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned}$$

を証明せよ。

(2-2) 束縛状態の運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーの期待値の時間平均は、

$$2\overline{\langle K \rangle} = \overline{\langle \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V \rangle}$$

を満たすこと証明せよ。ここで $K = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ であり、 $\overline{\langle \quad \rangle}$ は期待値の時間平均を意味する。

(2-3) ポテンシャルが $V = -\frac{a}{r}$ (a は正の定数) で与えられるとき、 $\overline{\langle K \rangle}$ と $\overline{\langle V \rangle}$ の関係を求めよ。ここで $r \equiv |\vec{r}|$ である。