

理学研究科博士前期課程 (物理学専攻・宇宙地球科学専攻)
入学試験問題
物理学

平成 21 年 8 月 26 日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。解答用紙は問題ごとに 1 枚とし、それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと。

問題 1

図 1 のように、内半径 a 、外半径 b 、幅 h 、質量 M (密度一定) の円筒状のロール紙 A が、半径 c ($c < a$) の固定された円柱 C にさし込まれている。重力加速度を g とし、以下の問いに答えよ。

- (1) ロール紙 A の重心を通り、ロール紙の幅方向に平行な軸 (ロール紙の中心軸 G) に関するロール紙の慣性モーメント I_G を求めよ。

以下の問いでは、記号 I_G を使っても良い。また、ロール紙と円柱は「線で接する」が、図 2 から図 5 の断面図で示すように、2 次元的に考え、「点で接する」あるいは「接点」と表現することにする。

- (2) 円柱 C の表面がなめらかでロール紙との間に摩擦がないとする。ロール紙の端 PP' を一定の張力 T で鉛直下向きに引っ張ったところ、図 2 に示すように、ロール紙は円柱の最高点 R で接したまま、すべりながら回転した。ロール紙の中心軸 G のまわりの角加速度 $\ddot{\phi}$ を求めよ。ここで、ロール紙の中心軸 G のまわりの回転角 ϕ は、図 2 において反時計回りを正とする。また、引っ張り出した紙は薄く、重さは無視できるものとする。

次に、ロール紙 A と円柱 C の間に摩擦があるとする。

- (3) ロール紙の端を張力 T で鉛直下向きに引っ張り続けると、ロール紙は円柱に対してすべりながら回転し続けた。このとき図 3 に示すように、ロール紙と円柱の接点 Q と円柱の中心 O を結ぶ線は、鉛直方向に対して角度 θ_0 をなしていた ($\angle QOR = \theta_0$)。ロール紙の中心軸 G のまわりの角加速度 $\ddot{\phi}$ を求めよ。引っ張り出した紙は薄く、重さは無視できるものとする。

次に、ロール紙 A が円柱 C に対して、すべらずに回転する場合を考える。

- (4) 円柱から離れないようにロール紙を回転させると、図 4 に示すように、接点は円柱 C 上を角 Θ だけ移動した ($\angle QOR = \Theta$)。このとき、ロール紙が中心軸 G のまわりに回転した回転角 Φ を求めよ。
- (5) ロール紙を円柱にさし込んだ状態から、ロール紙の端 PP' を少し引っ張ると、ロール紙は円柱に接したまま、すべることなく動いた。その状態でいったん静止させ、その後手を離すと、ロール紙が円柱に接したまますべることなく振り子運動を始めた。
- (a) 図 5 のように、 $\angle QOR = \theta$ とする。ロール紙の運動エネルギーと、O を基準としたロール紙の位置エネルギーを $\theta, \dot{\theta}$ を用いて求めよ。
- (b) θ が十分小さいときには、単振動となることを示し、その周期を求めよ。ただし、転がり摩擦は無視するものとする。

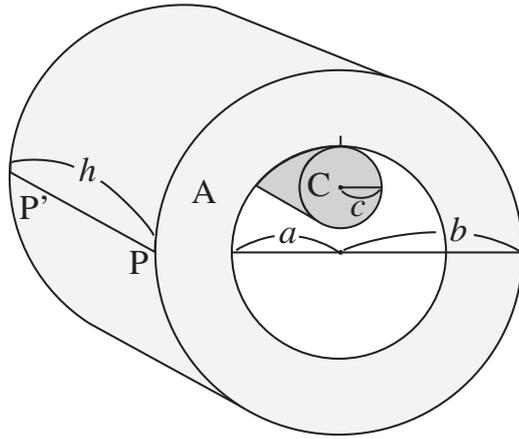


图 1

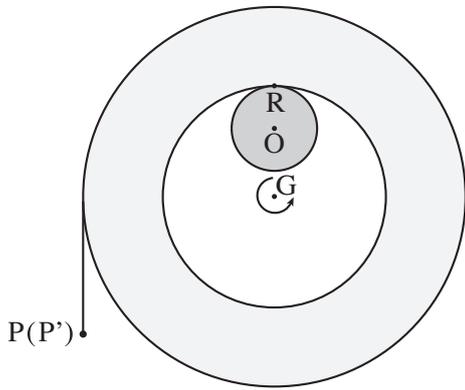


图 2

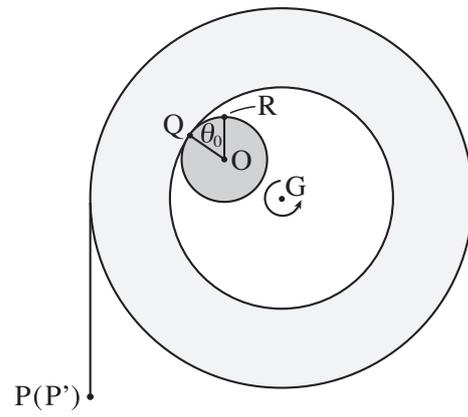


图 3

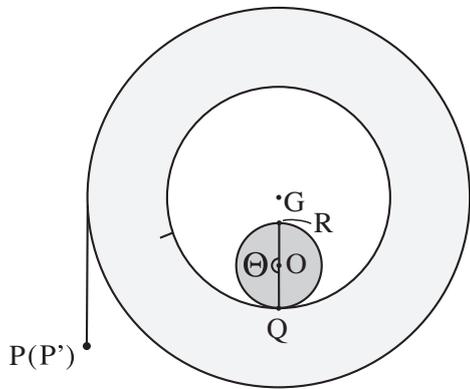


图 4

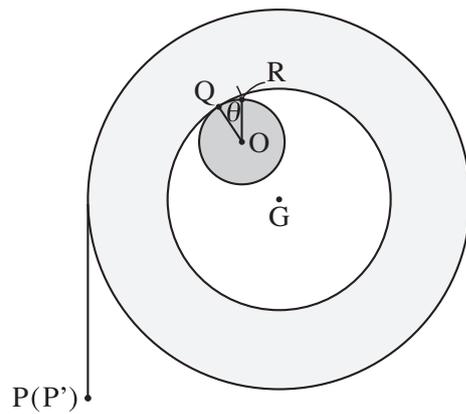


图 5

問題 2

地球大気の上層部には、太陽紫外線や宇宙線によって一部イオン化した層（電離層と呼ばれる）が複数存在する。この層が地表から放射される電波を反射するため、短波ラジオ放送などの電波が地表のかなり遠方まで到達できる。この電離層に関する下記の問いに解答せよ。（実際の電離層では地磁気の影響を考慮する必要があるがこの問題では無視する）

I. 電離層をプラズマ（電離ガス）として扱う。荷電粒子のうち陽イオンは十分重いため静止しており、電子のみが運動できると仮定する。真空中の誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 とし、この電離ガスの透磁率も真空中と同じ μ_0 とする。電磁波によるもの以外には電場と磁場は存在しないとする。

- (1) 電子の質量を m 、電荷を $-e$ 、速度を \boldsymbol{v} とし、電場 \boldsymbol{E} 、磁束密度 \boldsymbol{B} 中での電子に関する運動方程式をベクトル表示で書け。
- (2) 電磁波の電場 \boldsymbol{E} が時間的に $e^{-i\omega t}$ で変化しているとき、電子の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を電場 \boldsymbol{E} を用いて表せ。なお、 ω は角振動数であり、電子が電磁波の磁場から受ける力は無視できる。電子の平均速度をゼロとする。
- (3) この電子の運動によって電離ガス中に電流が発生する。これを考慮して Maxwell 方程式のうち $\nabla \times \boldsymbol{B} = \dots$ の方程式の右辺を電場 \boldsymbol{E} に比例する形で表せ。ただし電子の数密度を n_e とせよ。

問い (3) の解答を見ると、プラズマ中の電子によって誘電率が真空中とは異なる値に実効的に変化したと考えられる。この実効的な誘電率 ϵ がゼロになるときの ω は次の形になる。この ω_P をプラズマ振動の角振動数という。

$$\omega = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}} (\equiv \omega_P)$$

II. 上の結果を用いれば、電離層のプラズマを巨視的な誘電体とみなすことができる。そこで真空と誘電体の境界面における平面電磁波の透過と反射を考える。真空（誘電率 ϵ_0 、透磁率 μ_0 ）と平面境界で接する誘電体（誘電率 ϵ 、透磁率 μ_0 ）に、真空側から境界面と鉛直方向に進行する平面電磁波が入射し、透過波と反射波が生じている。

(4) 平面境界における電場と磁束密度に関する境界条件は下の (a) から (d) の式で書ける。境界面の法線方向を n 、接線方向を t 、真空側の電場、磁束密度をそれぞれ \boldsymbol{E} 、 \boldsymbol{B} 、誘電体内の電場、磁束密度をそれぞれ \boldsymbol{E}' 、 \boldsymbol{B}' とした。(a) から (d) の境界条件はそれぞれの Maxwell 方程式から導かれるのかを書け。必要に応じて電束密度 \boldsymbol{D} や磁場 \boldsymbol{H} も用いてよい。なお境界条件および Maxwell 方程式自体を導出する必要はない。

(a) $\epsilon_0 E_n = \epsilon E'_n$

(b) $E_t = E'_t$

(c) $B_n = B'_n$

(d) $B_t = B'_t$

平面電磁波の入射方向を z 軸、真空と誘電体の境界面を $z = 0$ とする。入射波、透過波、反

射波の電場，磁場はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{入射波： } \mathbf{E}_1 &= (E_1, 0, 0)e^{i(kz-\omega t)} & \mathbf{B}_1 &= (0, \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_1, 0)e^{i(kz-\omega t)} \\ \text{透過波： } \mathbf{E}_2 &= (E_2, 0, 0)e^{i(k'z-\omega t)} & \mathbf{B}_2 &= (0, \sqrt{\varepsilon\mu_0}E_2, 0)e^{i(k'z-\omega t)} \\ \text{反射波： } \mathbf{E}_3 &= (E_3, 0, 0)e^{i(-kz-\omega t)} & \mathbf{B}_3 &= (0, -\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_3, 0)e^{i(-kz-\omega t)} \end{aligned}$$

と書ける。ただし k, k' はそれぞれ，真空中および誘電体中における電磁波の波数で， $k = \omega/c$ ， $k' = k\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ ， $1/c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ， c は光速である。

- (5) 問い(4)の境界条件を用いて， E_2/E_1 ， E_3/E_1 を求めよ。
- (6) 境界面では全反射が生じる場合がある。透過波，反射波それぞれについて Poynting ベクトル \mathbf{S} の z 成分を求め，実効的な誘電率 ε がどのような条件を満たすときに全反射が生じるかを述べよ。
- (7) 問い(2)では磁場から電子が受ける力を無視できると仮定したが，電子に平面電磁波の電場と磁場のみが作用する場合， $|v| \ll c$ ならばこの仮定が妥当であることを示せ。

III. 実際に地上から電波を発射する実験を行ったところ，地表から真上に振動数 f の電波を発射すると，全反射して時間 T 後に地上に戻ってきた。

- (8) 電離層は一層だけと仮定し電離層の高度 h を T を用いて書け。また問い(6)で求めた全反射の条件を使って電子密度 n_e を f を用いて書け。
- (9) この実験を振動数 2MHz で行ったところ，発射後 0.8 ミリ秒で戻ってきた。電離層の高度を有効数字 2 桁、電子密度を有効数字 1 桁で計算せよ。以下の基礎物理定数を用いよ。

素電荷	$e : 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$
電子の質量	$m : 9 \times 10^{-31}\text{kg}$
真空中の誘電率	$\varepsilon_0 : 9 \times 10^{-12}\text{F/m}$
光速	$c : 3 \times 10^8\text{m/s}$

問題 3

多くの固体は温度を上げると体積が膨張する。この原理について考えよう。簡単のために N 個の同種原子が、体積 V の領域にほぼ等間隔で並んだ結晶を考える。各原子はそれぞれの平衡位置付近に束縛されて、三次元的に調和振動しているとする。角振動数は三次元方向すべてで同じ値 ω を持つものとする。調和振動子のエネルギー準位は、一つの自由度につき $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ (n は負でない整数) で与えられる。 \hbar はプランク定数 h を 2π で割った定数、 k はボルツマン定数、 T は結晶の温度であるとする。逆温度 $\beta = \frac{1}{kT}$ を使って解答しても良い。

I. まず、結晶の体積が $V = V_0$ で変わらない場合を考える。このとき、 $\omega = \omega_0$ であるとする。

(1) ~ (3) の問いに答えよ。

(1) 振動の自由度に関する分配関数 $Z_0(T, N)$ を T, N, ω_0 の関数として具体的な表式を求めよ。

(2) 振動の自由度に関するヘルムホルツ自由エネルギー $F_0(T, N)$ は

$$F_0(T, N) = 3NkT \log \left\{ \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right) - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right) \right\}$$

であることを示せ。

(3) 振動の自由度に関する内部エネルギー $U(T, N)$ 、および、定積比熱 $C_V(T, N)$ を、 T, N, ω_0 の関数として具体的な表式を求めよ。

II. 次に、結晶の体積が V_0 から変化する場合を考える。結晶の体積が V_0 から V に変化すると、固体内での各原子の角振動数が ω_0 から

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \gamma \frac{V - V_0}{V_0} \right)$$

に変化するとする。ここで、 γ は正の定数である。なぜなら、体積 V が増えると、原子を各平衡位置に結びつける力が弱まり、角振動数 ω は小さくなるからである。また、体積 V の変化量は小さく、 ω は負にならないとする。固体のヘルムホルツ自由エネルギー $F(T, V, N)$ は、体積変化の弾性エネルギーを加えて、

$$F(T, V, N) = 3NkT \log \left\{ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \right\} + \frac{a(V - V_0)^2}{2V_0}$$

と表されるとする。ここで、 a は正の定数である。このとき、(4) ~ (6) の問いに答えよ。

(4) 温度 T での圧力 $p(T, V, N)$ は

$$p(T, V, N) = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N}$$

で計算できる。圧力 $p(T, V, N)$ を T, V, N の関数として具体的な表式を求めよ。

(5) 圧力 $p = 0$ での体積を平衡体積と定義する。温度 $T = 0$ の極限で平衡体積を求めよ。また、温度が上昇したとき、平衡体積は $T = 0$ の時と比較して増加することを示せ。(ヒント：有限温度において $T = 0$ からの平衡体積の増加量を求める。ただし、 ω を含んでいても良い。 V_0 は弾性エネルギーを最小にする体積であるが、自由エネルギーを最小にする体積であるとは限らない。)

(6) 以上の議論をふまえ、温度が上昇すると平衡体積が増加する現象を、エントロピーの概念を用いて定性的に論ぜよ。

問題 4

- I. 一次元調和振動子型ポテンシャル $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ($\omega > 0$ は定数) に束縛された質量 m の粒子について考察する。ハミルトニアン H_0 は座標演算子 x と運動量演算子 p を用いて、

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

で与えられる。演算子 a, a^\dagger を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$$

と定義する。以下の問いに答えよ。

- (1) 交換関係 $[x, p]$ の値を書き, $[a^\dagger, a]$ の値を導け。
- (2) x, p を a, a^\dagger を用いて示せ。
- (3) $|n\rangle$ を $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ を満たす規格化された固有状態とする。ただし, n は負でない整数である。演算子 a, a^\dagger はそれぞれ、

$$\begin{aligned} a |n\rangle &= C_n |n-1\rangle & (n \geq 1), \\ a^\dagger |n-1\rangle &= C_n |n\rangle & (n \geq 0) \end{aligned}$$

のように演算子 $a^\dagger a$ に対する固有値を 1 変える演算子である。係数 C_n を求めよ。

- (4) H_0 を a, a^\dagger で示し, 状態 $|n\rangle$ が固有値 $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ を持つ H_0 の固有状態であることを示せ。

- II. 縮退のない離散的な固有値を持つハミルトニアン H_0 に摂動相互作用 $\lambda H'$ が加わった場合を考える。エネルギー固有値と固有状態を $W_n, |\psi_n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とすると、

$$(H_0 + \lambda H') |\psi_n\rangle = W_n |\psi_n\rangle$$

となる。 $W_n, |\psi_n\rangle$ を λ で展開すると、

$$\begin{aligned} W_n &= W_n^{(0)} + \lambda W_n^{(1)} + \lambda^2 W_n^{(2)} + \dots \\ |\psi_n\rangle &= |\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\psi_n^{(2)}\rangle + \dots \end{aligned}$$

と書ける。ここで、ハミルトニアン H_0 の n 番目のエネルギー固有値および規格直交化された固有状態を $W_n^{(0)}, |\psi_n^{(0)}\rangle$ とする。このとき、一次の摂動によるエネルギー補正 $W_n^{(1)}$ は、

$$W_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

- (5) 二次の摂動によるエネルギー補正 $W_n^{(2)}$ を $H', W_n^{(0)}, |\psi_n^{(0)}\rangle$ を用いて導き方と共に示せ。
- (6) H_0 を I で用いた一次元調和振動子のハミルトニアンとし, x 軸正の向きに強さ E の電場による相互作用 $H' = -qEx$ (q は粒子が持つ電荷) が加わる場合を考える。状態 $|n\rangle$ の摂動相互作用によるエネルギー変化を二次の摂動まで求めよ。問い (3) が未解答の場合は記号 C_n を用いてもよい。
- (7) ポテンシャル V および $V + H'$ を x の関数として図示し, 問い (6) で求めた摂動相互作用 $H' = -qEx$ によるエネルギー変化を簡潔に説明せよ。