

## 問題 1

誘導モータとは電磁誘導現象を利用したモータである。一般的な誘導モータでは、交流電流を与えて回転磁場（向きが回転する磁場）を発生させ、内部にある回転子を回転させる仕組みとなっている。回転子の軸には負荷が機械的に接続されており、負荷に力のモーメントを伝えて仕事をする。この問題では、誘導モータの動作原理を考察しよう。

回転子として、一巻きの閉じた正方形コイル 2 個を使用する。コイルの導線の単位長さあたりの電気抵抗を  $\rho$ 、一辺の長さを  $b$  とする。2 個のコイルは形状・材質が同等であり、それぞれコイル P、コイル Q と呼ぶ。回転磁場は大きさ  $B_0$  が一定で、 $z$  軸のまわりに一定の角速度  $\Omega (> 0)$  で回転しているとする。すなわち、時間  $t$  における磁束密度の  $x$ 、 $y$ 、 $z$  成分、 $B_x$ 、 $B_y$ 、 $B_z$  は、

$$(B_x, B_y, B_z) = (B_0 \cos \Omega t, B_0 \sin \Omega t, 0)$$

と書ける。

- I. はじめに、図 1 のようにコイル P のみを回転磁場中に設置する。コイル P の中心は原点に一致しており、 $z$  軸のまわりに回転できるとする。コイル P の法線ベクトル  $\mathbf{n}_P$  とコイル P を流れる電流  $\mathbf{J}_P$  の正の向きを図 1 のように定義する。コイルと磁場の向きの関係は、 $z$  軸の正の向きから見ると図 2 のようになり、磁場  $\mathbf{B}$  の向きから測った  $\mathbf{n}_P$  の角度を  $\theta$  とし、以下、これを相対角と呼ぶ。相対角  $\theta$  の時間微分  $\dot{\theta}$  を相対角速度と呼ぶ。コイル P が発生する磁場は無視できるとして、以下の問いに答えよ。

- (1) コイル P を貫く磁束  $\Phi$  を相対角  $\theta$  の関数として書け。
- (2) コイル P に流れる電流  $J_P$  を相対角  $\theta$  と相対角速度  $\dot{\theta}$  の関数として表わせ。
- (3) 磁場がコイル P に及ぼす力のモーメントの  $z$  成分、 $N_B$  を求めよ。

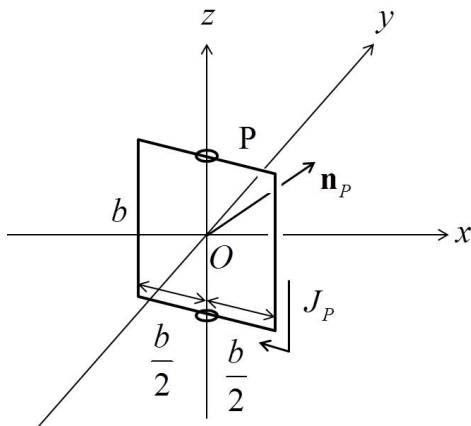


図 1

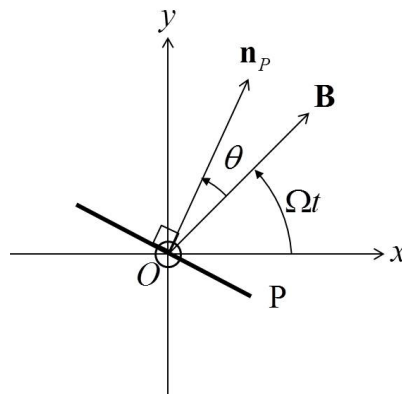


図 2

II. 次に、コイルQを図3のようにコイルPと一体化し、ひとつの回転子とする。ただし、二つのコイルは電気的には互いに絶縁されている。回転軸は $z$ 軸である。上辺同士、下辺同士は、直交させる。コイルPとQの中心は原点に一致している。回転子の向きを記述するため、 $\mathbf{I}$ と同様に、磁場 $\mathbf{B}$ の向きから測った、コイルPの法線ベクトル $\mathbf{n}_P$ の角度を相対角 $\theta$ と定義する。それぞれのコイルが発生する磁場は無視できるとして、以下の問いに答えよ。

- (4) 回転子には、回転軸のまわりに、磁場が及ぼす力のモーメントが働く。さらに、回転軸につながった負荷による力のモーメントが働く。負荷による力のモーメントは、 $z$ 成分のみであり、一定値 $N_l (< 0)$ であるとする。回転子の $z$ 軸のまわりの慣性モーメントを $I$ として、回転子の運動方程式を、相対角 $\theta$ の満たすべき微分方程式として記せ。
- (5) (4) で求めた微分方程式を用いて、相対角速度 $\dot{\theta}$ を時間の関数として求めよ。 $t = 0$ では $\dot{\theta} = 0$ とする。
- (6) 十分長い時間が経過した後に、回転子は慣性系でどのような回転運動をしているか。 $N_l$ に対する依存性を含めて、100字程度で説明せよ。
- (7) 同様に、十分長い時間が経過した状態において、回転子の2個のコイルで発生しているジュール熱の和 $P_J$ 、及び、回転子が負荷に対してなす仕事率 $P_l$ を求めよ。

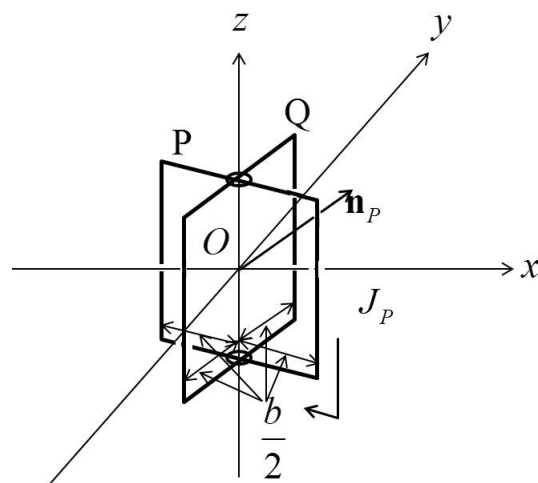


図3

## 問2

- I. 図1のように、 $x$ 方向、 $y$ 方向に無限に広い平面で真空と接している金属導体が $z > 0$ の領域に存在している。この金属導体の電気伝導率、誘電率、透磁率は、それぞれ $\sigma$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$ で記述されるものとする。電場成分が $(E_x(z, t), 0, 0)$ のように表される単色(角振動数 $\omega$ が一定)の電磁波が、この金属導体に垂直に入射したとする。次の問に答えよ。

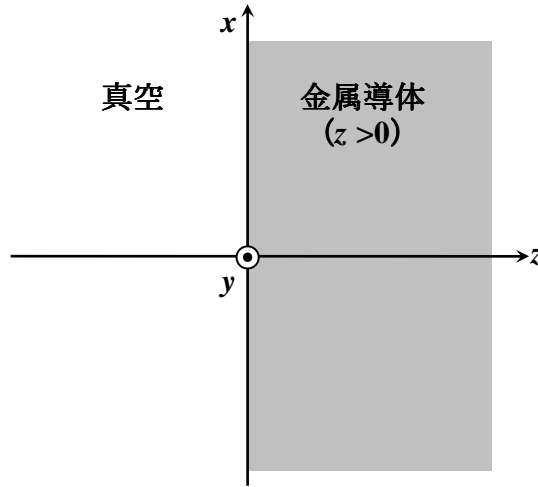


図1

- (1) Maxwell方程式とOhmの法則を用いて、金属導体内で電場は次の波動方程式を満たすことを導け。

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

任意のベクトル場 $\mathbf{A}$ に対して、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を使って良い。

- (2) (1)の波動方程式を満足する $E_x(z, t)$ について考える。定数 $E_0$ と伝播定数 $\gamma$ を用いて、 $E_x = E_0 e^{-i\omega t - \gamma z}$ とおき、 $\gamma^2$ を求めよ。
- (3)  $\gamma = \alpha + i\beta$ とおいて、減衰定数 $\alpha$ と位相定数 $\beta$ を求めよ。
- (4)  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ のとき、真空から金属導体に入射した電磁波の電場の振幅が $1/e$ となる距離 $\lambda_1$ を、 $\omega$ 、 $\sigma$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$ の中から必要なものを用いて求めよ。

- II. 図2のように、 $x$  方向、 $y$  方向に無限に広い平面で真空と接している完全導体が  $z > 0$  の領域に存在している。完全導体とは電気伝導を担う伝導キャリアが内部で全く散乱されない導体のことである。単色 (角振動数  $\omega$  が一定) の電磁波がこの完全導体に垂直に入射するとき、次の問に答えよ。

完全導体では電気伝導率  $\sigma$  は  $\sigma = \infty$  となる。このとき、(4) の答えから電磁波は完全導体には全く侵入できない。しかし、実際には完全導体にも電磁波が少しは侵入できるということを考えてみよう。

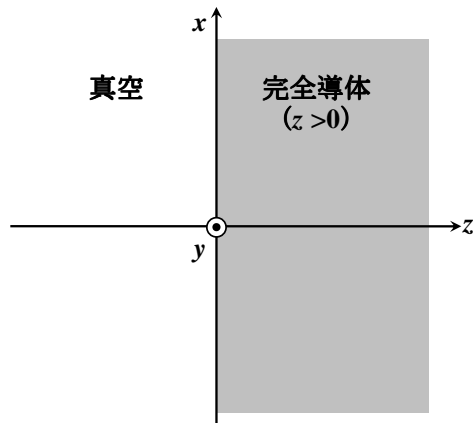


図 2

- (5) 完全導体内の単位体積当たりの伝導キャリアの数を  $n$ 、速度を  $\mathbf{v}$ 、1 個の伝導キャリアが持つ電荷を  $q$  とするとき、電流密度  $\mathbf{j}$  は  $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$  と書ける。完全導体に入射した電磁波の電場を  $\mathbf{E}$  とし、電場  $\mathbf{E}$  中を運動する伝導キャリアの運動方程式から、次の関係式を導け。ただし、伝導キャリアの質量は  $m$  とする。

$$\mathbf{E} = \frac{m}{nq^2} \frac{d\mathbf{j}}{dt}$$

- (6) (5) で導いた式は、この場合、全微分は偏微分で非常に良く近似でき、 $\mathbf{E} = \frac{m}{nq^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$  となる。この式と Maxwell 方程式を用いて、次の式を導け。ただし、 $\mathbf{B}$  は磁束密度とする。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{j} + \frac{nq^2}{m} \mathbf{B}) = 0$$

- (7) (6) の式で、 $\nabla \times \mathbf{j} + \frac{nq^2}{m} \mathbf{B} = 0$  が常に成り立つとき、完全導体内での電磁波の磁束密度  $\mathbf{B}$  が満たす波動方程式を導け。ただし、完全導体の誘電率、透磁率は  $\epsilon$ 、 $\mu$  とする。

- (8) 完全導体に入射する電磁波の磁束密度は、 $(0, B_y(z, t), 0)$ 、 $B_y(z=0, t) = B_0 e^{-i\omega t}$  とする。(7) で求めた式を解いて、完全導体に入射した電磁波の磁束密度を求めよ。また、完全導体に入射した電磁波の磁束密度の振幅が  $1/e$  となる距離  $\lambda_2$  を求めよ。ただし、完全導体に入射した電磁波の角振動数  $\omega$  は非常に小さいので、時間微分に関する項は無視して良い。

### 問題3

アンモニア分子  $\text{NH}_3$  は三角錐の形をしている。このため、窒素原子が水素原子3つの作る面の上にある場合と下にある場合で全く同じポテンシャルエネルギーを持つ2つの配位が存在する。これらの二つの配位の間にはポテンシャルの障壁がある（回転の自由度は無視する）。ここでは、アンモニア分子の物理を単純化したモデルを考え、それを変分法を用いて解析しよう。

以下の問題を解く際、必要なら次の積分の公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp(-\alpha x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}, \quad \alpha > 0$$

ポテンシャル  $V$  の中を動く、質量  $m$  の粒子を考えた時、エネルギー固有状態（エネルギー固有値  $E_n$ ）の波動関数  $\psi_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  は、次の Schrödinger 方程式を満たす。

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

エネルギー固有値には縮退はなく、次のような大きさの順序になっているとする。

$$E_0 < E_1 < E_2 < \dots$$

I. 一般の（規格化されていない）波動関数  $\psi$  に対するエネルギーの期待値  $E[\psi]$  は、

$$E[\psi] = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) H \psi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \psi(x)} \quad (1)$$

と書ける。

(問1)  $E[\psi]$  が不等式

$$E[\psi] \geq E_0$$

を満たすこと、および等号が成り立つのは、ある0でない定数  $c_0$  が存在して  $\psi = c_0\psi_0$  と書ける場合のみであることを証明せよ。変分法はこのことを利用した近似法である。

II. まず、 $\omega$  を角振動数とする調和振動子のポテンシャル

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad -\infty < x < \infty$$

の中を動く粒子を考えよう。

(問2) 正の実数  $\alpha$  を変分パラメータとして持つ試行関数

$$\varphi(x) = \exp\left(-\alpha \frac{x^2}{2}\right)$$

を考える。この試行関数に対するエネルギーの期待値  $E(\alpha)$  を求めよ。

(問3) 変分法を用いて、最適な  $\alpha$  の値  $\alpha_0$  と基底状態のエネルギー  $E_0$  を求めよ。つまり、関数  $E(\alpha)$  を最小にするような  $\alpha = \alpha_0$  と、最小値  $E_0$  を求めよ。

III. 次にアンモニア分子のモデルとして、二重井戸ポテンシャル

$$V(x) = -\frac{1}{4}m\omega^2x^2 + \frac{1}{8}m\omega^2\frac{x^4}{d^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

の中を動く粒子を考える。このポテンシャルは図1のように  $x = \pm d$  の2ヶ所で最小値をとる形をしている。

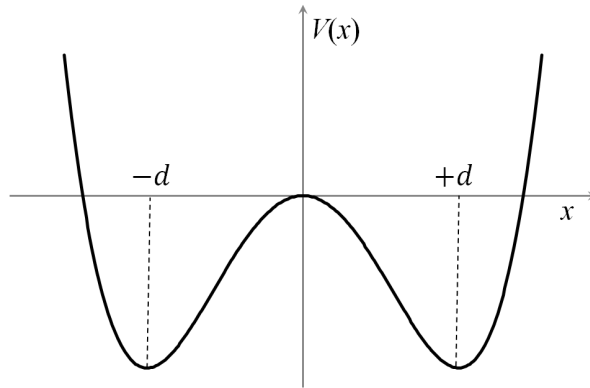


図1

以下では、この系のエネルギー固有状態とエネルギー固有値を変分法を用いて考察する。 $d$  は十分大きいとして、次の  $c_1, c_2$  を実数の変分パラメータとする試行関数を考える。

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \quad \varphi_1(x) = \varphi(x+d), \quad \varphi_2(x) = \varphi(x-d)$$

ただし、 $\varphi(x)$  は (問2) の  $\varphi(x)$  で  $\alpha = \alpha_0$  に固定したものである。 $E[\psi]$  を  $c_1, c_2$  の関数と考え、 $E$  を最小にする  $c_1, c_2$  を求めたい。

(問4) (問1) の式 (1) は、

$$E\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle$$

と書きなおせる。この式の両辺を  $c_i$  で偏微分し、さらに  $E$  を最小にする  $c_1, c_2$  に関して  $\partial E/\partial c_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) となることを使って、次の式が成り立つことを示せ。

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし、 $h_{ij} = \langle\varphi_i|H|\varphi_j\rangle$ ,  $s_{ij} = \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle$ ,  $i, j = 1, 2$  とした。このとき  $h_{12} = h_{21}$ ,  $h_{11} = h_{22}$ ,  $s_{12} = s_{21}$ ,  $s_{11} = s_{22}$  となることに注意せよ。

- (問 5) 上の式 (2) を用いて、この近似の下での基底状態の  $c_1, c_2$  の比  $c_1/c_2$  を求めよ。また基底状態のエネルギー固有値  $E_0$  を  $h_{ij}, s_{ij}$  を用いて表せ。この際、この系にはパリティ対称性 (変換  $x \rightarrow -x$  に対する対称性) があるのでエネルギー固有状態はパリティの固有状態にできることに注意するとよい。
- (問 6) 第一励起状態はこの試行関数の範囲内で基底状態に直交する状態として近似できる。第一励起状態の  $c_1, c_2$  の比  $c_1/c_2$  を求めよ。また、第一励起状態のエネルギー固有値  $E_1$  を  $h_{ij}, s_{ij}$  を用いて表せ。
- (問 7) ここで用いた試行関数による近似が良いためには、ある特徴的な長さ  $l$  があって  $l \ll d$  でなければならない。  $l$  を  $\hbar, m, \omega$  を用いて表せ。

## 問題 4

取り得る微視的状態がただ2つだけの2準位系はもっとも簡単でありながら、物理学のいろいろな分野で現れていて興味深い。このような2準位だけを持つ粒子を考えてみよう。その基底状態のエネルギーを  $\epsilon_0 = 0$ 、励起状態のエネルギーを  $\epsilon_1 = \epsilon$  とする。そのような粒子が  $N$  個集まった系  $A$  がある。個々の粒子は区別でき、お互いに相互作用はないとする。以下の設問に答えよ。ボルツマン定数を  $k$  ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K) とし、解答には  $\beta = 1/(kT)$  を用いてもよい ( $T$  は温度)。

I. この系  $A$  は温度  $T$  の熱浴と接している。

- (1) 系  $A$  の分配関数  $Z$ 、ヘルムホルツ自由エネルギー  $F$ 、内部エネルギー  $U$  を求めよ。
- (2) 系  $A$  のエントロピー  $S$ 、比熱  $C$  を求め、それぞれ  $T$  の関数として図示せよ。またその特徴を文章で記述せよ。 $T \rightarrow 0$  と  $T \rightarrow \infty$  の極限値を図中に示し、関数の形はそれからおよその形を推定すれば十分である。
- (3) 統計力学では、高温領域で「エネルギーの等分配則」が成り立ち、1自由度あたりの比熱が  $(1/2)k$  であると教えられる。しかし、問(2)でみたように、2準位系ではそうになっていない。理由を述べよ。
- (4) 実例として、ある種のタンパク質の比熱の温度変化が図1に示されている。タンパク質のエネルギー構造について、これから何がいえるか？

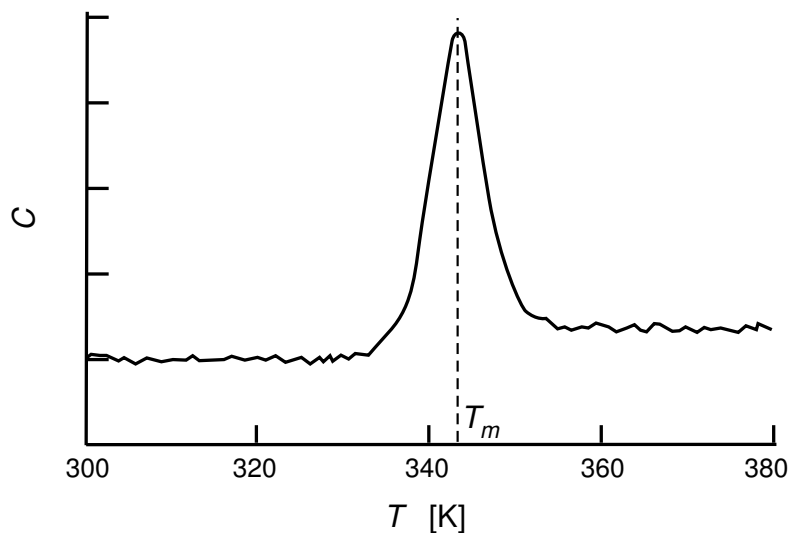


図 1



- II. これからは、系  $A$  の状態量として温度  $T$  以外に体積  $V$  を導入する。準位はこの系の体積  $V$  に依存する。一般に  $\epsilon_0 = \epsilon_0(V)$  であるがその基底状態の  $V$  への依存の詳細を知る必要はない。一方、励起状態と基底状態のエネルギー差  $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0$  の変化は体積の微小変化  $\Delta V$  に比例するとしよう。すなわち、 $\Delta\epsilon(V) = -\alpha\Delta V$  で、比例定数  $\alpha$  は正の量とする。

(5) 圧力  $p$  は

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (1)$$

で求められる。系  $A$  について、この表式より、

$$p = p_0 + N\alpha\eta \quad (2)$$

となることを示せ。ここに、体積に依存する項

$$p_0 = -N \frac{d\epsilon_0}{dV} \quad (3)$$

と、温度に依存する項  $N\alpha\eta$  に分けた。 $\eta$  は  $T$  の関数である。

- (6) 準静的な断熱膨張過程では、体積変化  $\Delta V$  に対して温度変化  $\Delta T$  はどう表されるか？

(ヒント：断熱過程では分配関数の表式の中で何が変わり、何がかわらないかを考えよ)