

問題 1

図 1、2 のように、鉛直下向きの一様重力場中（重力加速度の大きさを g とする）に水平に固定され、回転しない円柱 A の上を、一様な密度の円柱 B が運動するとする。円柱 A の半径は a 、円柱 B の半径は b 、質量は m であるとする。図 2 のように、円柱の運動を円柱の中心軸に垂直な断面に設定した 2 次元座標で記述する。円柱 A の中心 O を座標原点とする。円柱 A の中心軸に垂直な水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸（上向きを正とする）を設定する。また、円柱 B の中心 O' と O を結ぶ線分の長さを r 、 O と O' を結ぶ線と y 軸のなす角を θ として、円柱 B の中心 O' の位置を、2 次元極座標 (r, θ) で表す。円柱 B は、その中心軸が円柱 A の中心軸との平行性を保ったまま運動するとする。

参考：一般化座標が $\{q^\mu\}$ 、ラグランジアンが $L(\{q^\mu\}, \{\dot{q}^\mu\})$ で与えられたときのラグランジュの運動方程式は、以下の式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0$$

ここで、 $\dot{\cdot}$ は時間微分を表す。

- I. まず、円柱 A と B の間に摩擦力が働かず、円柱 B が円柱 A 上を回転せずに滑り落ちる場合を考える。円柱 B は初期には図 1 のように中心軸が $\theta = 0$ で静止した状態から微小な初速度を与えられて運動を始めたとする。ただし微小な初速度の大きさは無視できるとする。

- (1) 円柱 B の中心 O' の運動に関するラグランジアン L を書き下せ。
- (2) 円柱 B が A に接しているという条件を $f_1(r) = 0$ という形で表せ。ただし、 $f_1(r)$ は r の 1 次関数であるとする。
- (3) 問 (2) の拘束条件を取り入れたラグランジアンを $L' = L + \lambda_1 f_1$ と定義し、 L' を用いて r, θ に関する運動方程式を導け。（ここで、 λ_1 は r, θ とは独立な力学変数である。これにより拘束条件を取り入れた運動方程式が導かれることが知られており、これをラグランジュの未定乗数法という。）
- (4) $\dot{\theta}$ を θ, a, b, g を用いて表せ。
- (5) $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r}$ は円柱 B が A から受ける垂直抗力となる。この事実を用いて、円柱 B が A から離れる時の $\cos \theta$ を求めよ。

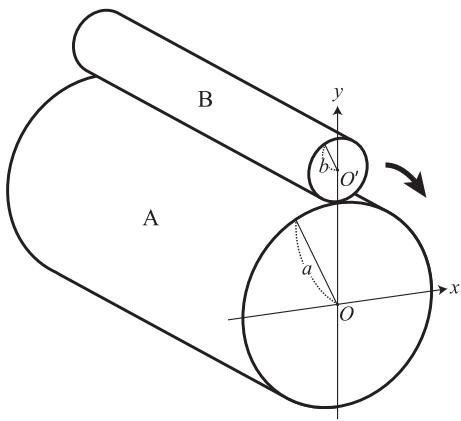


图 1

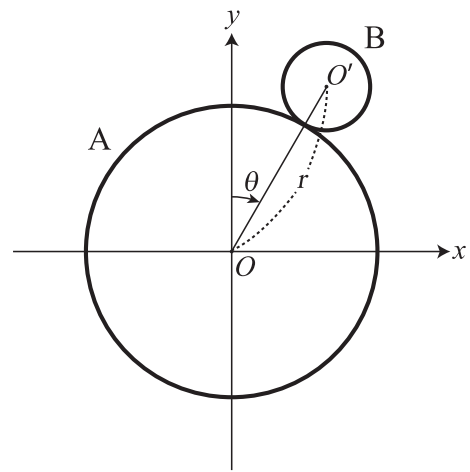


图 2

II. 次に、円柱 B が円柱 A 上を滑らずに転がる場合を考える。円柱 B は中心軸が $\theta = 0$ で静止した状態から、 O' を通る中心軸周りの微小な初期回転速度を与えられて運動を始めるとする。微小な初期回転速度の大きさは無視できるとする。図 3 のように、円柱の運動を円柱の中心軸に垂直な断面に設定した 2 次元座標で記述する。B の中心 O' の位置は、図 2 と同様に (r, θ) で表す。図 3 において、初期に円柱 A と接していた、円柱 B 上の点を Q とする。円柱 B の中心 O' が (r, θ) の位置まで到達した時の、円柱 B の初期からの自転角を図 3 のように ϕ とする。また、円柱 B の中心軸周りの慣性モーメントは $I = mb^2/2$ である。

- (6) 円柱 B のラグランジアン L を書き下せ。
- (7) 円柱 A と B は滑らないという条件から、 ϕ と θ の間になりたつ拘束条件を $f_2(\theta, \phi) = 0$ のように表せ。但し $f_2(\theta, \phi)$ は θ, ϕ の 1 次関数であるとする。
- (8) 円柱 B が A に接している条件は問 I の場合と同じなので、問 I で導いた $f_1(r) = 0$ という拘束条件が成り立つ。以上 2 つの拘束条件を取り入れたラグランジアンを $L' = L + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ と定義し、 L' を用いて r, θ, ϕ に関する運動方程式を導け。
- (9) $\dot{\theta}$ を、 λ_2, ϕ を用いずに、 θ, a, b, g を用いて表せ。
- (10) 問 I と同様に、 $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r}$ は円柱 B が A から受ける垂直抗力となる。この事実を用いて、円柱 B が円柱 A より離れる時の、 $\cos \theta$ を求めよ。
- (11) 問 (5) と問 (10) の答えを比べると、問 (5) の時の方が問 (10) の時より、円柱 B が円柱 A から離れる θ が小さいことが分かる。そうなる理由を物理的に説明せよ。

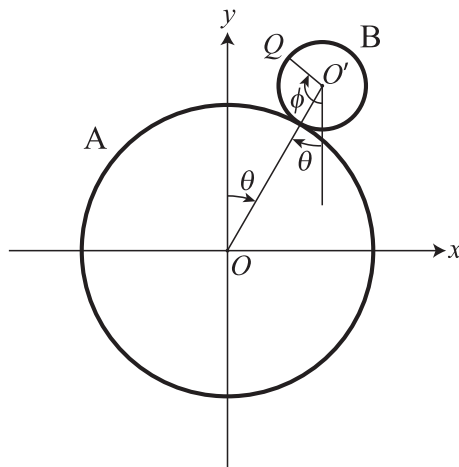


図 3

(計算用余白)
問題2は次ページから。

問題 2

磁気双極子モーメントに関する以下の問題を考える。真空の誘電率、透磁率をそれぞれ ϵ_0 、 μ_0 とせよ。

- I. 半径 a 、長さが l の細長い円柱状の棒磁石がある。(ただし、 $a \ll l$ である。) この磁石は円柱の軸方向 (長さ l に平行な方向) に一様な大きさ M の磁化 (単位体積当たりの磁気モーメント) を持つ。棒磁石の重心を原点にし、図 1 のような向きに置いたとして、以下の問いに答えよ。

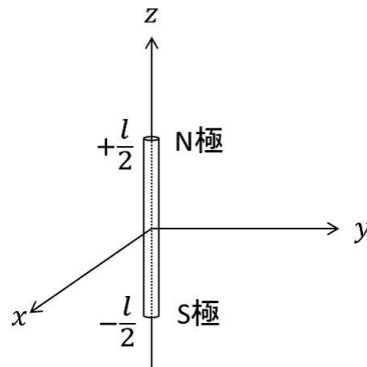


図 1

- (1) 棒磁石を 1 つの磁気双極子とみなし、その磁気モーメント \vec{m} を、 a 、 l 、 M と z 軸方向の単位ベクトル \vec{n} を用いて表せ。
- (2) 棒磁石の磁気モーメントは、棒の両端に仮想的に正負の点磁荷 $\pm q_m$ を置いた場合と等価であるとみなせる。この場合、磁荷の大きさ q_m を a 、 M を用いて表せ。
- (3) 棒磁石が点 $\vec{r} = (x, y, z)$ に作る磁場 $\vec{H}(\vec{r})$ を考える。但し、点 \vec{r} は棒磁石の長さ l に対して、 $|\vec{r}| \gg l$ であるとし、 ϵ が 1 より十分に小さいとき

$$(1 + \epsilon)^p = 1 + p\epsilon$$

と近似できることを用いよ。

- (a) 磁場を考えるときに、電荷 q_e が作る電位 ϕ_e と、仮想的な磁荷 q_m が作る磁位 ϕ_m が数学的に等価であることを利用してみる。磁荷 q_m が距離 r の点に作る磁位 ϕ_m は

$$\phi_m(r) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m}{r}$$

で与えられる。問 (2) の状況を踏まえて、磁気モーメント \vec{m} が、点 \vec{r} に作る磁位 $\phi(\vec{r})$ は、

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

と表されることを示せ。

- (b) 磁場 $\vec{H}(\vec{r})$ の各成分 (H_x, H_y, H_z) を、 $m = |\vec{m}|$ 、 μ_0 と位置座標を用いて表せ。

- II. 物質の反磁性は、外部磁場の影響で電子の軌道運動による磁気モーメントが変化することで現われると理解できる。このことを図2のように、水素原子を例にラザフォードの原子模型を使って考える。以下の問いに答えよ。

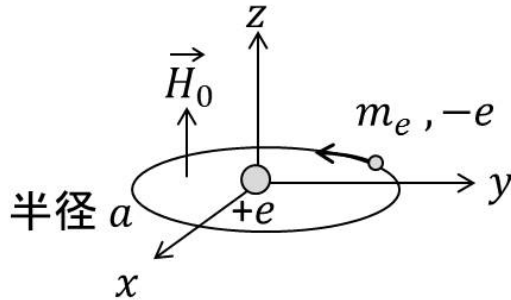


図 2

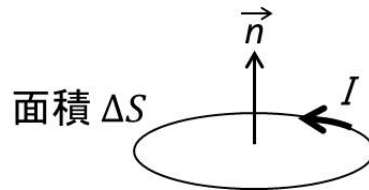


図 3

- (4) 図3のような微小面積 ΔS の周りに電流 I が流れる微小回路を考えると、一般にその電流が作る磁場は、

$$\vec{m} = I \Delta S \vec{n}$$

であらわされる磁気モーメントが作る磁場と遠方で一致する。ただし、 \vec{n} は、微小面積の面の法線ベクトルであり、電流の向きに右ねじを回したときそのねじが進む向きにとる。図2のように、質量 m_e 、電荷 $-e$ の電子が $+e$ の電荷の周りを半径 a で円運動している。電子の軌道運動による磁気モーメントを、軌道角運動量ベクトル \vec{l} 、 m_e 、 e を使って表せ。

- (5) z 軸方向に一様で微小な磁場 \vec{H}_0 をかけると、電子はローレンツ力を受けて角速度が変化する。ただし、この時 a は変化しないと仮定する。磁場をかける前後の電子の回転の角速度をそれぞれ、 ω_0 、 ω と置いたとき、それぞれの角速度での力の釣り合いの式を書け。
- (6) 磁場 \vec{H}_0 をかける前後の電子の角速度の変化 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ を m_e 、 e 、 μ_0 、 $H_0 = |\vec{H}_0|$ を用いて表せ。ただし、 $\Delta\omega \ll \omega \simeq \omega_0$ として、 $\Delta\omega$ の1次の効果だけを考えよ。
- (7) 電子の軌道運動の変化による磁気モーメントの変化 $\Delta\vec{m}$ を a 、 m_e 、 e 、 μ_0 、 \vec{H}_0 を使って書け。ただし、ここでも $\Delta\omega$ は1次の効果だけを考えよ。

(計算用余白)

(計算用余白)
問題3は次ページから。

問題3

1次元調和振動子の問題を量子力学で考えよう。粒子がポテンシャル

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$$

の中で運動をしているとすると、系のハミルトニアン $H_{h.o.}$ は

$$H_{h.o.} = \frac{1}{2\mu}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2\hat{x}^2$$

で表される。ここで μ は粒子の質量、 \hat{x} 、 \hat{p} はそれぞれ位置と運動量の演算子、 ω は角振動数である。

計算を簡単にするため、新しい演算子 \hat{P} 、 \hat{Q} を導入する。

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{\mu\hbar\omega}}\hat{p}$$

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\hat{x}$$

以下の式

$$H = \frac{H_{h.o.}}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)$$

により H を定義し、系のエネルギー固有値 E_n を $E_n = \varepsilon_n \hbar\omega$ のように $\hbar\omega$ の単位で表すと、シュレーディンガー方程式は

$$H\psi_n(Q) = \varepsilon_n\psi_n(Q) \quad (i)$$

と簡略化される。ここで n は状態番号で、系のエネルギーの小さい順に $n = 0, 1, 2, \dots$ と番号付けする。 ψ_0 は基底状態 (最低エネルギー状態) の波動関数でその固有値は ε_0 である。

以下の問に答えよ。必要に応じて、次の公式や問の末に記載している図1 (次々ページ) を用いよ。

$$\int_0^{+\infty} \exp(-y^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(1) (a) \hat{x} と \hat{p} の交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$$

を利用して、 \hat{P} と \hat{Q} の交換関係 $[\hat{P}, \hat{Q}]$ を求めよ。

(b) 座標表示の波動関数に作用させる場合には

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

として良い。これを利用して、 \hat{P} を $\frac{\partial}{\partial Q}$ で表わせ。

- (2) 全ての 0 以上の整数 n について次の式が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示せ。

$$\frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)(\hat{Q} \pm i\hat{P})^n \psi_0(Q) = (\varepsilon_0 \mp n)(\hat{Q} \pm i\hat{P})^n \psi_0(Q) \quad (\text{ii})$$

- (3) 各状態のエネルギー固有値と規格化された波動関数を Q の関数として求めよう。式 (i) の形からエネルギー固有値は負にはならない。式 (i)、(ii) より

$$(\hat{Q} \pm i\hat{P})^n \psi_0(Q)$$

も固有状態となり、そのエネルギー固有値は $\varepsilon_0 \mp n$ である。 $\psi_0(Q)$ よりも低いエネルギーの状態は存在しないので

$$(\hat{Q} + i\hat{P})\psi_0(Q) = 0$$

が満たされなければならない。

以下、波動関数 $\psi_n(Q)$ は、確率密度 $|\psi_n(Q)|^2$ の Q の全空間 ($Q = [-\infty, +\infty]$) における積分値が 1 になるように規格化し、位相は波動関数が実数になるようにとることとする。

- (a) 基底状態の規格化された波動関数 $\psi_0(Q)$ を Q の関数として求めよ。
 (b) ε_n を導出せよ。
 (c) 規格化された波動関数 $\psi_n(Q)$ を Q の関数として求めよ。 $\frac{\partial}{\partial Q}$ が式に残っていても良い。以下の式を用いると便利である。

$$(\hat{Q} + i\hat{P})(\hat{Q} - i\hat{P}) = \hat{Q}^2 + \hat{P}^2 + i[\hat{P}, \hat{Q}]$$

- (4) 系が基底状態にあるとき、古典論では許されない Q の領域に粒子を見出す確率を問の末の図 1 (次ページ) を利用して求め、小数点以下 2 桁まで記せ。
- (5) (a) $n = 0, 1, 2$ のそれぞれの場合について、波動関数 $\psi_n(Q)$ の $Q = 0$ での値を求めよ。
 (b) 系の $x < 0$ の領域のポテンシャルを変更し $V(x) = +\infty$ になるようにした。この系のエネルギー固有値を $\hbar\omega$ を単位として低いエネルギーから順に ε'_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) と記す。 ε'_n の表式を理由付きで推定せよ。

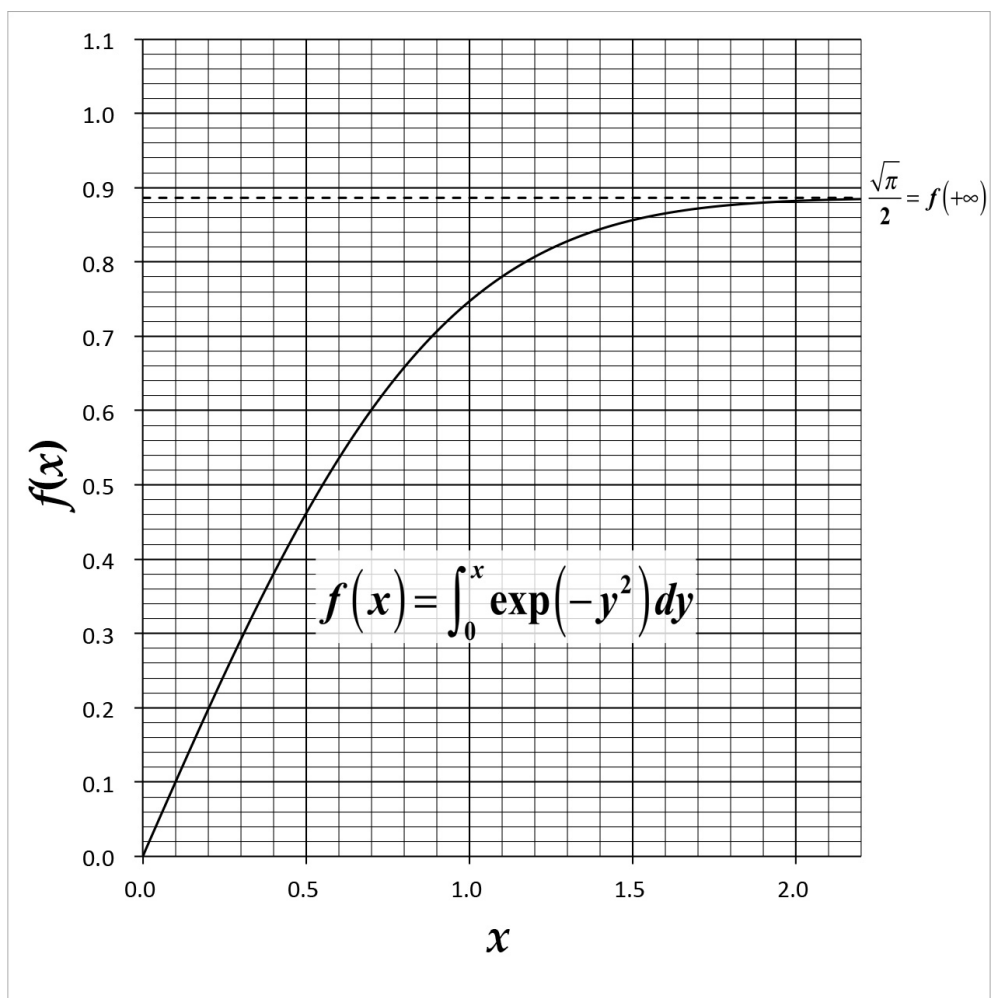
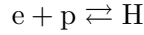


図 1 : 実線は関数 $f(x) = \int_0^x \exp(-y^2) dy$ のグラフ。点線は $x \rightarrow +\infty$ の極限值 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

(計算用余白)
問題4は次ページから。

問題4

電子 e と陽子 p が水素原子 H に結合したり、逆に水素原子 H が電子 e と陽子 p へ解離したりする過程



について考察しよう。はじめに、巨視的な体積 V を持つ容器に N_0 個の電子と N_0 個の陽子を封入する。ただし、 N_0 も巨視的に大きい数であるとする。この系を温度 T の環境下に置いて長時間待つと、系は上記の結合・解離過程を無数に繰り返しながら熱平衡状態に達し、容器内に電子、陽子、水素原子の混合気体ができる。以下では、この熱平衡状態における電子数 N_e 、陽子数 N_p 、水素原子数 N_H の平均値 \bar{N}_e 、 \bar{N}_p 、 \bar{N}_H について議論する。簡単のため、上記の結合・解離過程以外の粒子間相互作用の効果を無視する。また、水素原子が水素分子を形成することは考えない。

- I. まず、熱力学における自由エネルギー最小の原理から何が言えるか考えてみよう。以下では、電子、陽子、水素原子が、容器に単独で封入されたときに持つヘルムホルツ自由エネルギーを、それぞれ $F_e(T, V, N_e)$ 、 $F_p(T, V, N_p)$ 、 $F_H(T, V, N_H)$ とする。

- (1) N_e 、 N_p を N_0 と N_H を用いて表せ。
 (2) (1) の結果から、

$$\tilde{F} = F_e(T, V, N_e) + F_p(T, V, N_p) + F_H(T, V, N_H)$$

は、 (T, V) を固定したとき N_H の関数となる。自由エネルギー最小の原理によれば、 $\tilde{F}(N_H)$ を最小にする N_H の値が、熱平衡状態で実現する N_H の値 \bar{N}_H を与える。この事実から、熱平衡状態において、電子、陽子、水素原子の化学ポテンシャル μ_e 、 μ_p 、 μ_H の間に成り立つ関係式を導け。

- II. 次に統計力学を用いて議論する。ここでは混合気体が十分に希薄かつ高温であることを想定し、古典統計力学の範囲で考えよう。 N 個の電子 ($\nu = e$)、陽子 ($\nu = p$)、水素原子 ($\nu = H$) だけを、容器内に封入したとき、その正準分配関数 (カノニカル分配関数) は、

$$Z_\nu(T, V, N) = \frac{g_\nu^N V^N}{h^{3N} N!} \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \cdots d^3\vec{p}_N \exp\left(-\frac{1}{k_B T} \sum_{i=1}^N \epsilon_\nu(\vec{p}_i)\right)$$

と書ける。ただし、 h はプランク定数、 k_B はボルツマン定数である。また、 g_ν は電子や陽子がスピン $1/2$ を持つことに由来する内部自由度の数で、 $g_e = 2$ 、 $g_p = 2$ 、 $g_H = 4$ と定義される。1 個の電子および陽子が運動量 \vec{p} を持っているときのエネルギー $\epsilon_e(\vec{p})$ および $\epsilon_p(\vec{p})$ は、電子および陽子の質量を m_e および m_p として、

$$\epsilon_e(\vec{p}) = \frac{|\vec{p}|^2}{2m_e}, \quad \epsilon_p(\vec{p}) = \frac{|\vec{p}|^2}{2m_p}$$

と書ける。一方、1個の水素原子が運動量 \vec{p} を持っているときのエネルギー $\epsilon_H(\vec{p})$ は、水素原子が常に基底状態にあると近似することにより、

$$\epsilon_H(\vec{p}) = -E_{1s} + \frac{|\vec{p}|^2}{2m_p}$$

と表せる。ここで、 $E_{1s} > 0$ は水素原子の基底状態に対する束縛エネルギーである。また、 $m_e \ll m_p$ であるので、水素原子の質量 $m_e + m_p$ を m_p で近似した。

- (3) 与えられた計算式の積分を実行し、 $Z_e(T, V, N)$ と $Z_p(T, V, N)$ の表式を求めよ。その際、ガウス積分に対する公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。
- (4) 問(3)で求めた正準分配関数から $F_e(T, V, N)$, $F_p(T, V, N)$ を計算することができる。その際、スターリングの公式 $\ln N! \sim N \ln N - N$ を用いると、 $\nu = e, p$ の意味として、結果を、

$$F_\nu(T, V, N) = -Nk_B T \left(\ln \left(\frac{g_\nu V}{N \lambda_\nu^3} \right) + 1 \right) = -Nk_B T \left(\ln \left(\frac{2V}{N \lambda_\nu^3} \right) + 1 \right)$$

の形に整理できる。 λ_e および λ_p の表式を求めよ。

- (5) ここでやっている近似の範囲では $\epsilon_H(\vec{p}) = \epsilon_p(\vec{p}) - E_{1s}$ の関係が成り立っていることと、スピンの起因する内部自由度の数が水素原子では陽子の2倍であることに注意して、 $F_H(T, V, N)$ を $k_B T$, N , V , λ_p , E_{1s} の式として書き表せ。
- (6) 問(2)および問(4)、問(5)で得た結果に注意して、 $\overline{N_e N_p} / \overline{N_H}$ を $k_B T$, V , λ_e , E_{1s} の式として書き表せ。

III. 今度は、量子統計力学の枠組みで $\overline{N_\nu}$ ($\nu = e, p, H$) を計算しておいて、後から古典統計力学の扱いが妥当になる極限 (古典極限) を考えてみよう。

- (7) 電子と陽子を理想フェルミ気体、水素原子を理想ボーズ気体として扱って $\overline{N_\nu}$ ($\nu = e, p, H$) を $k_B T$, V および化学ポテンシャル μ_ν の関数として求めよ。ただし、結果に実行されていない積分を含んでよい。
- (8) 問(7)で求めた結果において古典極限をとることによって得られる $\overline{N_H}$, $\overline{N_e}$, $\overline{N_p}$ の表式を求め、 $\overline{N_e N_p} / \overline{N_H}$ を $k_B T$, V , λ_e , E_{1s} , μ_e , μ_p , μ_H の式として書き表せ。 λ_e を使わず、結果を $k_B T$, V , E_{1s} , μ_e , μ_p , μ_H , m_e , h を用いて表してもよい。古典極限ではフェルミ分布関数やボーズ分布関数がボルツマン分布関数に置き換わることに注意せよ。

参考：問(8)の結果に問(2)で求めた μ_e , μ_p , μ_H の間に成り立つ関係式を代入すると、再び問(6)の結果が導かれる。

(計算用余白)

(計算用余白)