問題 1

図 1 のように、質量 m で半径 a の一様な円板 A を、半径 R で厚さの無視できる固定された半円 B の内部に置いた。円板 A は、図 1 に示す平面内で半円 B 内をすべることなくころがりながら運動する。円板 A の重心を C、半円 B の中心を O とし、O を通る鉛直線と OC のなす角度を θ、円板 A がその重心 C のまわりに回転する角速度を ω とする。反時計回りの向きを θ, ω の正の向きとする。また重力加速度を g とする。

(1) 円板 A の、重心 C を通り円板に垂直な軸のまわりの慣性モーメントが $\frac{1}{2}ma^2$ であることを示せ。

(2) ころがる円板 A に働く摩擦力を F とし、図 1 に示す向きを摩擦力の正の向きとする。このとき、円板 A の接線方向に対する重心の運動方程式と、重心のまわりの回転の運動方程式を、それぞれ書け。

(3) 円板 A がすべらずにころがる条件を $a, R, \dot{\theta}, \omega$ から必要なものを用いて表せ。ただし $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ (t は時間) とする。

(4) **(2)(3)** を用いて、角度 θ での摩擦力 F を m, θ, g を用いて表せ。

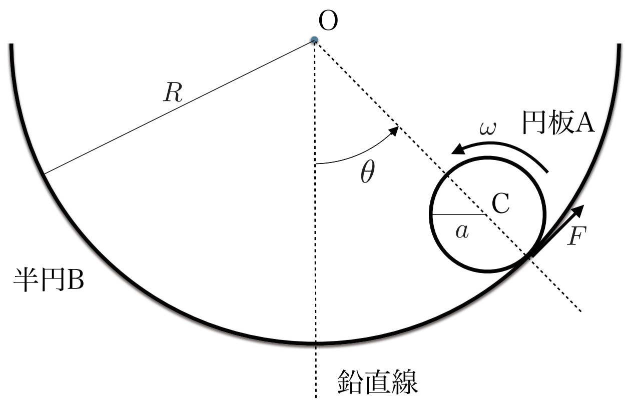

図 1

次に、図２のように、半円Ｂの底部に質量 m の小さなおもりＤを取り付ける。そして、半円Ｂの固定をはずして、中心Ｏのまわりに自由に回転できるようにする。ただし、半円Ｂの質量は無視できる。

この状態で、円板Ａを半円Ｂの内部に置いた。円板Ａはすべらずにころがり、重心Ｃのまわりに角速度 ω で回転した。それに伴い半円Ｂも中心Ｏのまわりに回転を始めた。図２のように、Ｏを通る鉛直線とODのなす角度を ϕ とし、反時計回りの向きを ϕ の正の向きとする。

(5) 円板Ａと半円B、おもりＤからなる系について、運動エネルギーと位置エネルギーを、それぞれ求めよ。ただし、位置エネルギーの基準を中心Ｏの高さにとる。

(6) 円板Ａがすべらずにころがる条件を $a, R, \dot{\theta}, \omega, \dot{\phi}$ から必要なものを用いて表せ。

(7) この系のラグランジアンを、ω を用いない形で表せ。また θ および ϕ に関するラグランジュ方程式を、それぞれ求めよ。

(8) 円板Ａと半円Ｂがともに平衡位置のまわりで微小振動する場合を考える。**(7)** のラグランジュ方程式を解き、可能な２つの基準振動数を求め、それぞれ g と R のみを用いて表せ。ただし $a \ll R$ とし、$R - a \approx R$ としてよい。また微小振動なので、$\sin\theta \approx \theta$、$\sin\phi \approx \phi$ としてよい。

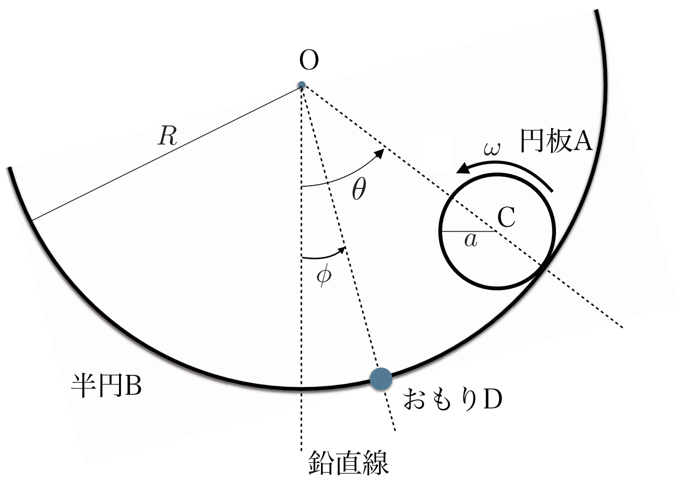

図 2

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

物質と電磁場が同時に存在すると、物質を構成する分子が電磁場へ与える影響も考慮する必要がある。ここでは等方的な常誘電体が存在するときの電場や誘電率について考えてみよう。以下では誘電体は電気感受率 χ を持つとし、分極 $\mathbf{P}$ は $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ と書けるとする。電束密度 $\mathbf{D}$ は $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$ で与えられる。ここで ϵ_0 は真空の誘電率、ϵ は物質の誘電率、$\mathbf{E}$ は誘電体に加えられた電場である。

I. 半径 R の誘電体でできた一様な球を真空中に置いた。球の中心に電荷 $q\,(q > 0)$ を持つ点電荷がある。

(1) ガウスの法則を用い、球の中心から距離 r 離れた点における電束密度 $\mathbf{D}$ の大きさと向きを、球の内部 $(r < R)$ および外部 $(r > R)$ で、それぞれ求めよ。

(2) 球の中心から距離 r 離れた点における電場 $\mathbf{E}$ の大きさと向きを、球の内部 $(r < R)$ および外部 $(r > R)$ で、それぞれ求めよ。

(3) 球の中心に誘導される電荷、および球の表面に誘導される電荷の面密度を、それぞれ求めよ。

II. 物質を構成する分子一つあたりの電気双極子モーメント $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ を、微視的な分極率 α と物質中で分子にかかる局所的な電場 $\mathbf{E}'$ を使って、

$$\mathbf{p}_{\mathrm{m}} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}'$$

と定義する。分極 $\mathbf{P}$ に、単位体積あたり N 個の電気双極子モーメント $\mathbf{p}_m$ が寄与するとすると、巨視的な物理量である電気感受率 χ は、

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}}$$

と書くことができる (クラウジウス-モソッティの式)。

(4) 物質中で分子にかかる局所的な電場 $\mathbf{E}'$ を、外部電場 $\mathbf{E}$、分極 $\mathbf{P}$、真空の誘電率 ϵ_0 を用いて表せ。

(5) **(4)** で計算した電場 $\mathbf{E}'$ と外部電場 $\mathbf{E}$ のずれはどのような理由によって生じるか、簡潔に述べよ。

III. **II** で導入した微視的な分極率 α を古典力学を用いて評価しよう。分子のモデルとして、正の電荷を帯びたイオンの回りに、電荷 $-e$、質量 m の電子が復元力 $-m\omega_0^2\mathbf{x}$ で拘束されていると考える。$\mathbf{x}$ は陽イオンの位置から測った電子の変位ベクトルである。電子は速度に比例する抵抗力を受けるとし、その比例定数を $\lambda m\,(\lambda > 0)$ とする。局所的な電場 $\mathbf{E}'$ が存在するときの電子の運動方程式は、

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -m\omega_0^2\mathbf{x} - \lambda m\frac{d\mathbf{x}}{dt} - e\mathbf{E}'$$

と書ける。

(6) 局所的な電場 $\mathbf{E}'$ が時間に依存しない場合、ある変位 $\mathbf{x}$ で力がつりあい、電子は静止した。このとき電気双極子モーメント $\mathbf{p}_\mathrm{m} = -e\mathbf{x}$ は有限となる。微視的な分極率 α を、$\epsilon_0, e, m, \omega_0$ を用いて表せ。

(7) 次に、局所的な電場 $\mathbf{E}'$ が、時間 t に対して角振動数 $\omega\,(\omega > 0)$ で周期的に、$e^{-i\omega t}$ のように変動する場合を考える。十分に時間が経った後には、変位も同じ時間依存性を持つ。そのときの複素数に拡張した微視的な分極率 $\alpha(\omega)$ を、$\epsilon_0, e, m, \omega_0, \omega, \lambda$ を用いて表せ。

(8) 複素分極率 $\alpha(\omega)$ の虚部を求めよ。

(9) 誘電体中を伝わる電磁波を記述する方程式は、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ のフーリエ成分 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ に対して、c を真空中の光速として、

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2\epsilon(\omega)}{\epsilon_0 c^2}\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

で与えられる。ここで物質中の透磁率は真空中の透磁率に等しいとした。 複素分極率 $\alpha(\omega)$ の虚部が正のとき、電磁波が減衰することを説明せよ。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

問題 3

質量 m の粒子が、図 1 のような 1 次元ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (a < |x|) \\ 0 & (b < |x| < a) \\ V_0 & (|x| < b) \end{cases}$$

の中で運動している。ただし、$a > b > 0,\ V_0 \geq 0$ であるとする。プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ として、以下の問に答えよ。

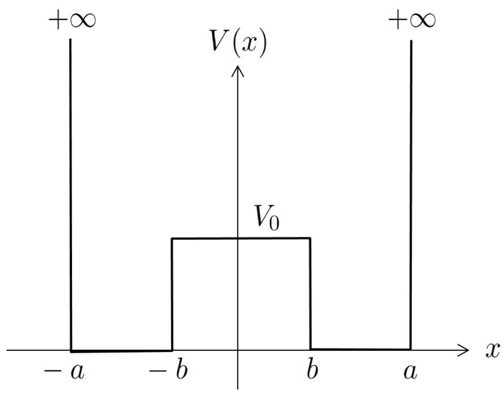

図 1

I. まず、V_0 が 0 の場合について考える。

(1) 基底状態のエネルギー固有値と規格化された固有波動関数を求めよ。

(2) 基底状態を $n = 1$ として、n 番目の固有状態のエネルギー固有値と規格化された固有波動関数を、n が奇数 $(n = 1, 3, 5, \ldots)$ の場合と n が偶数 $(n = 2, 4, 6, \ldots)$ の場合のそれぞれについて求めよ。

II. 次に、エネルギー固有値を E として、$V_0 > E$ の場合について考える。以下では k, ρ を、それぞれ

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \rho = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

とする。

(3) 一般的に、1 次元ポテンシャルが偶関数 $V(x) = V(-x)$ である場合に、束縛状態の固有波動関数は偶関数か奇関数となることを示せ。ただし、$V(x)$ が有限のとき、束縛状態に縮退がないことを用いてよい。

(4) 固有波動関数が偶関数のとき、領域 $-a < x < -b,\ b < x < a$ における波動関数の一般解を、それぞれの領域で求めよ。その際、二つの領域で共通の任意定数 $A,\ B$ と k を用いて表せ。

(5) 固有波動関数が偶関数のとき、$|x| < b$ の領域における波動関数の一般解を、一つの任意定数 C と ρ を用いて表せ。

(6) 固有波動関数が偶関数のときのエネルギー固有値 E は、関係式

$$\frac{1}{k}\tan\big(k(a-b)\big) = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{\tanh(\rho b)}$$

を満たすことを示せ。

(7) 固有波動関数が奇関数のときのエネルギー固有値 E が満たす関係式を導け。

(8) V_0 が無限大 ($V_0 \to +\infty$) の場合、**(6)**, **(7)** の関係式を用い、固有波動関数が偶関数あるいは奇関数のときの最低エネルギー固有値をそれぞれ求め、縮退していることを示せ。V_0 が有限の場合とは異なり、$V_0 \to +\infty$ の場合にはエネルギー固有値が縮退している理由を、定性的に考察せよ。

(計算用余白)

(計算用余白)

問題 4 は次のページから

問題 4

磁性体における熱ゆらぎについて統計力学的に考察しよう。N 個のスピン $\mathbf{S}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ の集まりからなる磁性体を考える。量子効果を無視し、スピンを古典的自由度として扱う。各スピン $\mathbf{S}_i$ は、2 つの成分を持つ単位ベクトルで $\mathbf{S}_i = (S_i^x, S_i^y) = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ のように角度変数 θ_i $(-\pi \le \theta_i < \pi)$ で表せるものとする。

I. x 方向に磁場がかかっているとき、系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = -hM_x + \mathcal{H}_0, \qquad M_x = \sum_{i=1}^{N} S_i^x$$

で与えられる。ここで M_x は磁化の x 成分である。ハミルトニアンの第 1 項は磁場によるエネルギー、第 2 項はスピン間の相互作用で、磁場に依存しない。h は磁場に比例した、エネルギーの次元をもつ量である。以下、h を磁場と呼ぶ。磁場 h のもとでの物理量 A の熱平均は、

$$\langle A \rangle_h = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}A)}{\mathrm{Tr}e^{-\beta\mathcal{H}}}$$

と表せる。ここで、$\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ (T は温度、k_{B} はボルツマン定数) である。また Tr は可能なスピン配位に関する状態和で、

$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}A) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_N e^{-\beta\mathcal{H}}A$$

と書ける。

(1) 熱平均 $\langle M_x \rangle_h$ の磁場 h に対する応答を考える。微小な磁場に対する応答を特徴づける 1 スピンあたりの帯磁率 χ

$$\chi = \frac{1}{N}\frac{\partial\langle M_x\rangle_h}{\partial h}\bigg|_{h=0}$$

を、$h = 0$ での磁化のゆらぎの大きさ $\langle M_x^2\rangle_0 - \langle M_x\rangle_0^2$ で表せ。

(2) $h = 0$ のとき、磁化のゆらぎの大きさ $\langle M_x^2\rangle_0 - \langle M_x\rangle_0^2$ を、i 番目と j 番目のスピンの相関

$$C_{i,j} = \langle S_i^x S_j^x\rangle_0 - \langle S_i^x\rangle_0\langle S_j^x\rangle_0$$

を用いて表せ。

II. スピン間の相互作用が無視できる場合 ($\mathcal{H}_0 = 0$) を考える。

(3) このとき、$C_{i,j}$ を求めよ。

(4) 帯磁率 χ が $\dfrac{1}{T}$ に比例すること (キュリー則) を示せ。

III. 次に、スピン $\mathbf{S}_i$ が 1 次元的に $i = 1, 2, \ldots, N$ の順で並び、隣接するスピンと強磁性的に相互作用している場合を考える。磁場は $h = 0$ とする。系の一つの端に、向きを固定された 0 番目のスピン $\mathbf{S}_0$ を加えておく。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_0 = -J \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_{i-1} \cdot \mathbf{S}_i = -J \sum_{i=1}^{N} \cos\phi_i$$

となる。ここで $J > 0$ は、強磁性相互作用の強さを表し、エネルギーの次元を持つ。第 2 式の ϕ_i は、$\mathbf{S}_{i-1}$ と $\mathbf{S}_i$ のなす角である。これを積分変数にとると、物理量 A の状態和は

$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}_0} A) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_N e^{-\beta\mathcal{H}_0} A$$

と書ける。

(5) 分配関数、ヘルムホルツの自由エネルギーおよび内部エネルギーを、それぞれ求めよ。結果は、関数

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{x\cos\phi}$$

およびその微分 $I'(x)$ を用いて表せ。

(6) 高温 $\beta J \ll 1$ での内部エネルギーおよび比熱を、それぞれ求めよ。$I(x)$ の $x \ll 1$ での振る舞いを調べ、その結果を用いよ。

(7) 低温 $\beta J \gg 1$ での内部エネルギーおよび比熱を、それぞれ求めよ。$I(x)$ の $x \gg 1$ での主要項を求め、これを用いよ。$\alpha > 0$ として

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{-\alpha\psi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

となることを用いてよい。

IV. **III** で考えた系で、スピンの相関を調べてみよう。ただし、$\mathbf{S}_0$ は固定しない。この場合、ハミルトニアンの対称性より $\langle \mathbf{S}_i \rangle_0 = \mathbf{0},\ C_{i,j} = \frac{1}{2}\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle_0$ となる。また、$N \to \infty$ とする。

(8) 距離 l 隔てたスピン間の相関 $C_{l+1,0}$ は、$C_{l,0}$ と関係づけられることを示せ。この関係を用いて、相関は距離 l とともに $e^{-l/\xi}$ のように指数関数的に減衰することを示し、相関長 ξ を、$I(\beta J)$ およびその微分 $I'(\beta J)$ を用いて表せ。

（計算用余白）

（計算用余白）