問題 1

質量 m の質点が、ポテンシャル U による中心力を受けて、2 次元平面内を運動する場合を考える。位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$、速度ベクトルを $\dot{\boldsymbol{r}} \equiv \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ とする。2 次元極座標表示 (r, θ) において、r 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、θ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\theta$ とすると、$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ であることを用いてよい。一般に $\dot{f}$ と $\ddot{f}$ は、関数 f の時間微分 $\dfrac{df}{dt}$ と、時間の 2 階微分 $\dfrac{d^2 f}{dt^2}$ をそれぞれ表すものとする。

I. ポテンシャルが $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$（α は正の定数）の場合を考える。

(1) この系のラグランジアン $\mathcal{L}$ を書き、r と θ についての運動方程式を導け。

(2) 前問の θ についての運動方程式から、角運動量が保存していることが分かる。その大きさを L とする。以下の手順に従って、質点の軌道が

$$r = \frac{1}{A\cos(\theta - \theta_0) - \dfrac{m\alpha}{L^2}} \qquad (*)$$

で表されることを示せ。ここで、A と θ_0 は積分定数である。

【手順：r についての運動方程式で $\dfrac{1}{r}$ を u とおき、さらに $\ddot{r} = -\left(\dfrac{L}{m}\right)^2 u^2 \dfrac{d^2 u}{d\theta^2}$ を用いて、u の θ に関する微分方程式を求め、これを解く。】

次に、図 1 に示すように、入射する速さ v_0、衝突パラメータ b で入射した質点について考える。ここで b は、入射側の軌道の漸近線と原点 O との距離で定義される。このときの散乱角 φ_s を以下の手順で導出することを考える。散乱角とは、$t \to -\infty$ のときの速度ベクトルと、$t \to \infty$ のときの速度ベクトルのなす角で、図 1 に示した φ_s である。なお以下の問いでは、前問で示した質点の軌道の式 $(*)$ を**既知のものとして用いてよい**。

(3) 保存している角運動量の大きさ L を m, α, v_0, b のうち必要なものを用いて求めよ。

(4) 式 $(*)$ において、質点が原点 O に最も近づくとき、$\theta = \theta_0$ であり、図 1 の太矢印に対応する。以後は $\theta_0 = 0$ となるように座標系を取る。太矢印と $t \to \pm\infty$ における質点の位置ベクトルとのなす角度を θ_1 (> 0) としたとき、$\cos\theta_1$ を m, α, L, A を用いて求めよ。

(5) $t \to -\infty$ における質点の速さが v_0 であることを利用して、$\sin\theta_1$ を m, L, A, v_0 を用いて求めよ。

【手順：式 $(*)$ を時間で微分し、さらに $\dot{\theta}$ と L の関係を用いる。】

(6) $\tan\left(\dfrac{\varphi_s}{2}\right)$ を m, α, v_0, b のうち必要なものを用いて求めよ。

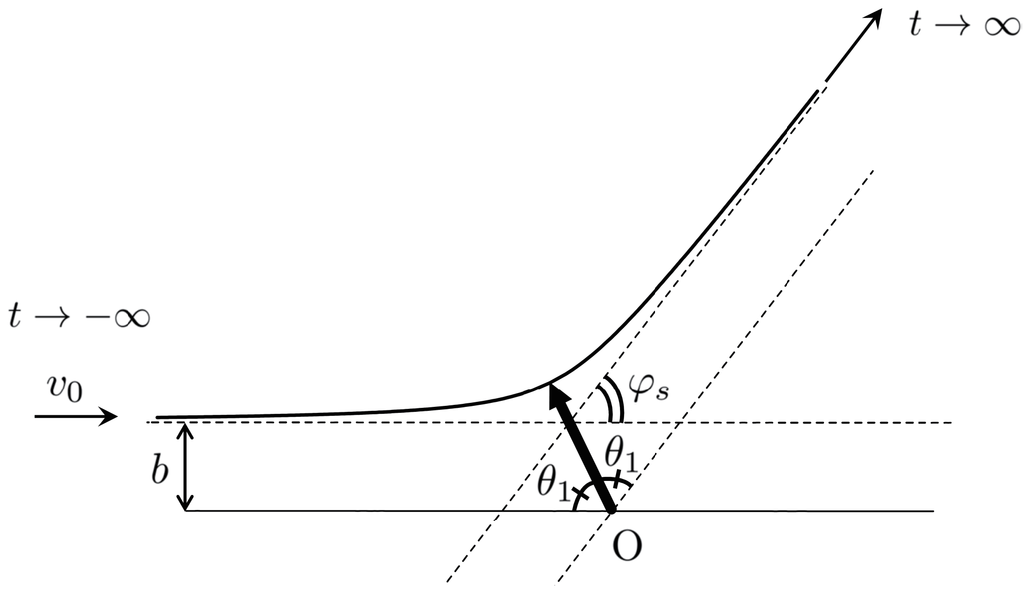


図 1

II. 今度は、ポテンシャルが $U = -\dfrac{\beta}{r^n}$（β 及び n は正の定数）の場合を考える。

(7) この系のラグランジアン $\mathcal{L}$ を書き、r と θ についての運動方程式を導け。

(8) 質点が等速円運動をしている場合を考える。そのときの半径を $r = r_0$、角速度を $\dot{\theta} = \omega_0$ とする。半径と角速度の間に成立する関係を $m,\ \beta,\ n,\ r_0,\ \omega_0$ のうち必要なものを用いて求めよ。

(9) この等速円運動に微小な摂動を加え、$r = r_0 + \rho$ となった場合を考える。ここで $\dfrac{\rho}{r_0} \ll 1$ である。また摂動を加えた後の角運動量の大きさは、摂動を与える前と同じであったとする。このとき、質点が回転運動をしながら、動径方向に対して振動できる n の条件を求めよ。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

半径 R の球の表面に電荷が面密度 $\sigma\,(>0)$ で一様に分布しており、球は角速度 ω で z 軸を自転軸として回転している。球と共に電荷も同じ角速度で回転している。球の中心を原点とする極座標を (r, θ, ϕ) とする。真空の透磁率を μ_0 とし、MKSA 単位系で解答せよ。

(1) 図 1 のように天頂角 θ の位置にある z 軸周りのリング状の部分を考える。微小な角度領域 $[\theta, \theta + d\theta]$ に対応する帯状の部分の面積 dS を求めよ。

(2) このリング状の部分を流れる環状電流 dI を $R, \sigma, \omega, \theta, d\theta$ を用いて書け。

(3) **(2)** の環状電流は一つの磁気双極子を構成していると考えることができる。その磁気双極子モーメント dm を $R, \sigma, \omega, \theta, d\theta$ を用いて書け。ここで、$dm =$ 環状電流 $\times$(その囲む面積) と定義する。

(4) **(3)** の答えを積分して、球全体が作る磁気双極子モーメントの大きさ m を R, σ, ω を用いて書け。

(5) 球の内外にできる磁束密度の形について、図 2 の (ア)〜(オ) の断面図の中から最も適切なものを選べ。（理由は説明しなくてよい。）

(6) 図 1 のリング状に対応する部分を厚み $dz\,(>0)$ の薄い層とみなすと、この板状部分は側面に環状電流 dI をもつ薄い円柱とみることができる。**(2)** で求めた環状電流を $dI = \eta\, dz$ と書くと、この薄い円柱は上下面に磁荷が表面密度 $\pm\eta\ (\eta > 0)$ で分布した板磁石とみなすことができる（図 3 を参照)。**(2)** の解答と照らし合わせて、η を $R, \sigma, \omega, \theta$ のうちから必要なものを用いて書け。

(7) **(6)** で考えた無限に薄い円柱の重ね合わせで球を近似する（板状磁石の重ね合わせと考える）とき、球面上の磁荷の面密度を $\eta,\, \theta$ を用いて答えよ。（ヒント：薄い円柱の端における円柱表面と球面のズレについて考察せよ。）

(8) 球の内部の磁束密度の大きさを求めよ。
（ヒント：図 4 のように、無限に薄い板状部分を取り除いて内部の点 P を考え、そこにできる磁束密度を考えよ。）

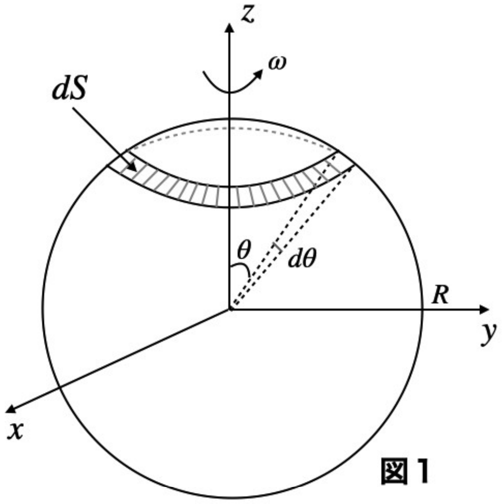
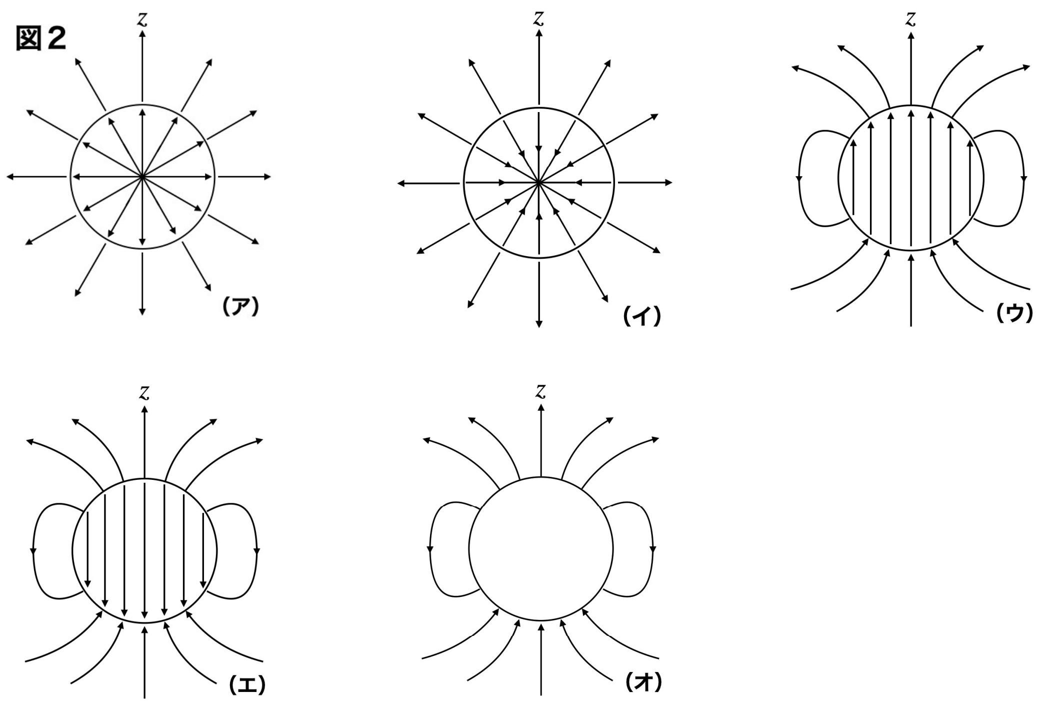


図１

図２



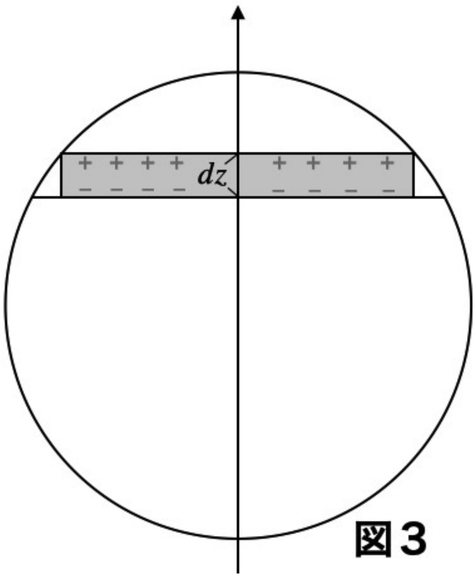


図３

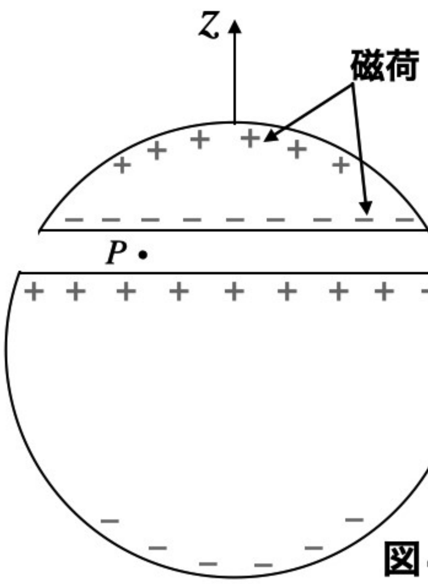


図４

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

問題 3

調和振動子ポテンシャルの下で運動する電子に関する以下の問いに答えよ。電子の質量を m、調和振動子ポテンシャルの角振動数を ω、プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

I. x 軸上を動く電子の一次元調和振動子ポテンシャルの下での運動を考える。電子のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

但し $p = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ である。昇降演算子を

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right), \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$$

と定義することで、$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \dfrac{1}{2}\right)$ と書ける。

(1) 基底状態 $\phi_0(x)$ は $a\phi_0(x) = 0$ より求まる。$\phi_0(x) = \exp(-\lambda x^2)$ とおいて、定数 λ を求めよ。またエネルギー固有値 ϵ_0 を求めよ。

(2) 第一励起状態は $\phi_1(x) = a^\dagger\phi_0(x)$ により求まる。$\phi_1(x)$ とそのエネルギー固有値 ϵ_1 を求めよ。波動関数の規格化はしなくて良い。

II. xy 面上を動く電子の二次元調和振動子ポテンシャルの下での運動を考える。電子のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

但し $p_x = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x},\ p_y = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}$ である。H の固有関数は $f(x)g(y)$ の形で書くことができる。

(3) H のエネルギー固有値を値の小さい方から $E_0 < E_1 < E_2 < \cdots$ と書くとき、E_0, E_1 の値と、それぞれの縮重度を求めよ。また対応する固有状態を ϕ_0, ϕ_1 を用いて表わせ。波動関数の規格化はしなくて良い。

(4) xy 面に垂直な角運動量の成分は $L_z = xp_y - yp_x$ で与えられる。$[L_z, H]$ はいくらか。簡単な理由とともに答えよ（計算せずに答えて良い）。

(5) E_0 に対応する状態が L_z の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

(6) E_1 に対応する状態は、適切な線形結合を取ることにより、L_z の固有状態にすることができる。そのようにして得られた状態に対して、L_z の固有値を求めよ。

III. 前問 II の系の磁場に対する応答を考えよう。

(7) 一様な磁束密度 B を xy 面と垂直に印加すると、ハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H(B) = \frac{1}{2m}\left[(p_x + eA_x)^2 + (p_y + eA_y)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

但し $(A_x, A_y) = \dfrac{B}{2}(-y, x)$ とする。e は電子の電荷の絶対値である。ハミルトニアンを、B に関して $H(B) = H(0) + W_1 B + W_2 B^2$ と展開するとき、W_1 を求めよ。

(8) 固有状態のエネルギーを $E(B)$ とすると、その状態の $B = 0$ における磁気モーメントは

$$\mu = -\frac{\partial E(B)}{\partial B}\bigg|_{B=0}$$

で与えられる。前問 II でエネルギーが E_0, E_1 となる全ての状態に対して、μ を求めよ。

(9) B^2 の項を無視せずに、$H(B)$ の厳密な固有エネルギーを考えよう。$B = 0$ でエネルギーが E_0, E_1 となる全ての状態に関して、任意の B における固有エネルギーを求めよ。またそれらの $\omega \to 0$ の極限を求めよ。

（ヒント：B^2 の項は調和振動子ポテンシャルとまとめることができる。）

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

問題 4

I. 常磁性体の熱力学を考察する。以下ではすべて単位体積当たりで考察することにし、磁性体の体積変化は考慮しないことにする。磁性体に対して、温度 T、磁場 H のもと、エントロピー S、磁化 M を変数とする内部エネルギー $U(S,M)$ の微小変化 dU は、S の微小変化 dS、M の微小変化 dM を使って、

$$dU = TdS + HdM \qquad (☆)$$

という熱力学第一法則を満たす。

(1) 実験的には温度 T、磁場 H を制御するのが容易である。式 (☆) から、内部エネルギーの変数 S, M を T, H に変数変換 (ルジャンドル変換) して、T, H を変数にした自由エネルギー $G(T,H) = U - TS - HM$ に対して、

$$dG = \boxed{\text{(あ)}}\, dT + \boxed{\text{(い)}}\, dH$$

と書くとき、空欄 (あ)、(い) を S, U, M, T, H のうち必要なものを用いて表せ。

(2) 自由エネルギー $G(T,H)$ に対して

$$\frac{\partial^2 G}{\partial H \partial T} = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial H}$$

が成立する。この関係から導かれる偏微分の間の関係式 (マクスウェル関係式)

$$\left(\frac{\partial \boxed{\text{(う)}}}{\partial H}\right)_T = \left(\frac{\partial \boxed{\text{(え)}}}{\partial T}\right)_H$$

の空欄 (う)、(え) に入るものを書け。

自由エネルギー $G(T,H)$ を使って考えるとき、

- 磁場一定条件での熱容量 $C_H = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_H$
- 温度一定条件での帯磁率 $\chi = \left(\dfrac{\partial M}{\partial H}\right)_T$
- 磁場一定条件での磁化の温度に対する変化率 $\alpha = \left(\dfrac{\partial M}{\partial T}\right)_H$

が基本的な応答係数となり、他の応答係数はこれらの組み合わせで書ける。ここでは磁化一定での熱容量 $C_M = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_M$ を、以下の手続きに従い C_H, χ, α, T で表そう。

(3) 磁化一定での熱容量 C_M および磁場一定条件での熱容量 C_H を、$\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_M$, $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_H$, α, H のうち必要なものを用いて、それぞれ表せ。

(4) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial H}\right)_T$ を式 (☆) および、G のマクスウェル関係式を使って χ, α, T, H で表せ。

(5) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_M$ を内部エネルギーが $U(T, H(T, M))$ という関数の依存性があるとみて計算し、C_M を C_H, χ, α, T で表せ。必要であれば、この場合に

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M = -\frac{\alpha}{\chi}$$

が成立することを使ってよい。

II. 常磁性体を統計力学的に考察する。以下ではボルツマン定数を k、温度を T、逆温度を $\beta = 1/kT$ とする。N 個の原子からなる固体の常磁性体を考える。i 番目の原子が磁気モーメント $\mu\sigma_i$ を持つとし、σ_i は ± 1 の値を取るとする。外部から空間的に不均一な磁場を与えたとき、磁気モーメントと磁場の相互作用によるエネルギーは

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N} \mu\sigma_i h_i$$

と書くことができる。ただし h_i は i 番目の原子に作用する磁場である。磁場の空間的な不均一性を、無次元の変数 ε_i を使って $h_i = \varepsilon_i h$ と一般的に表すとする。

(6) 磁場が一様なとき、すべての i に対し $\varepsilon_i = 1$ となる。このとき、エネルギーの期待値 E を求めよ。

以下では、ε_i が i に応じて 0 以上のさまざまな値を取りうる場合を考えよう。この状況は統計的には ε_i の分布関数 $g(\varepsilon)$ を使って表現することができ、ε_i の一般の関数 $f(\varepsilon_i)$ の i についての和を

$$\sum_{i=1}^{N} f(\varepsilon_i) = \int_0^{\varepsilon_{\max}} d\varepsilon\, g(\varepsilon) f(\varepsilon)$$

と書くことができる。$\varepsilon_{\max}$ は十分大きい定数である。

(7) 一般の $g(\varepsilon)$ に対し、エネルギーの期待値 E を $g(\varepsilon)$ を用いた積分を使って表せ。

(8) $g(\varepsilon) = NA\varepsilon^{\gamma}$ のとき、熱容量 $C = \dfrac{dE}{dT}$ を求めよ。ただし $\gamma \geq 0$ であり、A は規格化のための定数とする。解答では ε に関する積分を計算する必要はなく、残したままで良い。

(9) **(8)** の状況で $\gamma = 0$ とし、さらに $\beta\mu\varepsilon_{\max}h$ がほぼ無限大と見なせるぐらいの低温を考える。このとき熱容量 C を計算せよ。また、この結果を温度 T の関数として図示せよ。必要であれば $\displaystyle\int_0^{\infty} dx\, \frac{x^2}{\cosh^2 x} = \frac{\pi^2}{12}$ を使ってよい。

（計算用余白）

（計算用余白）