理学研究科博士前期課程
(物理学専攻・宇宙地球科学専攻)

入学試験問題

物理学

令和 6 年 8 月 27 日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。答案用紙は問題ごとに１枚とし、それぞれに問題番号・受験番号・氏名を書くこと。

問題 1

I. **(1)** 慣性系に固定された 3 次元のデカルト座標系を XYZ 系とする。質量 m の質点が XY 面内（$Z=0$）を自由に運動するとき、この質点の運動を記述するラグランジアン L を、XYZ 系から見た質点の速度ベクトル $\vec{V}$ を用いて表せ。

(2) XYZ 系の Z 軸まわりに、Z 軸の正方向から見て反時計回りに一定の角速度 $\omega > 0$ で回転するデカルト座標系を xyz 系とする。xyz 系の原点および z 軸は、XYZ 系の原点および Z 軸とそれぞれ一致している（図 1）。このとき XYZ 系から見た質点の速度ベクトル $\vec{V}$ は、xyz 系から見た質点の速度ベクトル $\vec{v}$ および位置ベクトル $\vec{r}$ を用いて

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

と表される。ここで $\times$ はクロス積（外積）を表し、$\vec{\Omega}$ の xyz 系での成分表示は $\vec{\Omega} = (0, 0, \omega)$ となる。これらの関係式を用いて、(1) のラグランジアン L を xyz 系における質点の座標 x, y およびそれらの時間微分 $\dot{x}$, $\dot{y}$ を用いて書き表せ。ここで文字の上のドットは時間微分を表す（例えば時間 t の関数 $f(t)$ について、$\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, $\ddot{f} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$）。以下ではこの記法を断りなしに用いてよい。

(3) (2) のラグランジアンで記述される質点の xyz 系における運動方程式を求め、質点の加速度の x 成分 $\ddot{x}$ と y 成分 $\ddot{y}$ を x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ を用いてそれぞれ表せ。

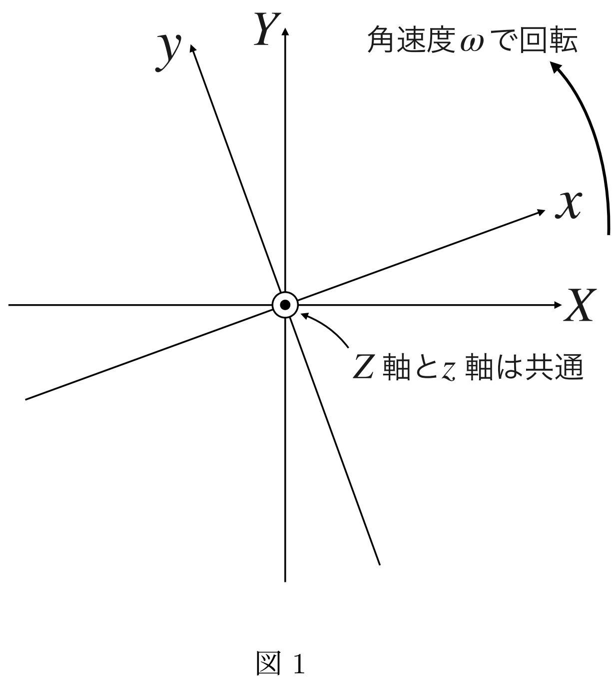

図 1

II. 慣性系において、万有引力のみを及ぼしあう 2 つの質点 A, B が、2 質点系の質量中心 O のまわりを一定の角速度 $\omega > 0$ で円運動する状況を考える。質点 A, B にはその他の力は働いていない。ここで O を原点とし、質点 A, B がつねに x 軸上に位置するように回転するデカルト座標系を xyz 系とする（図 2）。すなわち、xy 面は質点 A, B の回転面に一致しており、x 軸と y 軸は z 軸のまわりに慣性系に対して角速度 ω で回転している。x 軸の正の向きは、質点 A から B に向かう方向に選ぶ。質点 A, 質点 B の質量をそれぞれ M_{A}, M_{B}（ただし $M_{\mathrm{A}} > M_{\mathrm{B}}$）、 2 質点間の距離を a、万有引力定数を G とする。

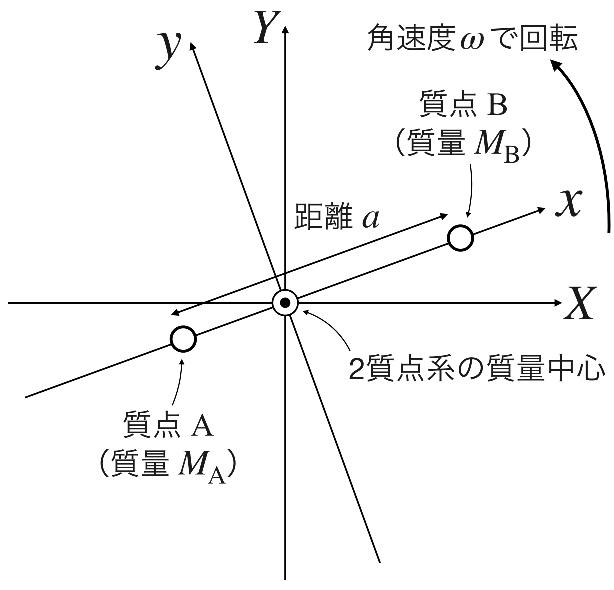

図 2

(4) xyz 系における質点 A, B の x 座標をそれぞれ x_{A}, x_{B} とする。x 軸の正の向きの定義から、$x_{\mathrm{A}} < 0, x_{\mathrm{B}} > 0$ である。x_{A}, x_{B} を

$$\beta = \frac{M_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}}$$

および a のみを用いて表せ。

(5) xyz 系において、質点 B には x_{B} に比例する遠心力と質点 A からの万有引力が働き、両者はつりあっている。このことに注意して、ω^2 を G, M_{A}, M_{B}, a のみを用いて表せ。

III. 問題 II の設定に加えて、さらに xyz 系における第 3 の質点 P（質量 m）の運動を考える。ここで m は十分小さく、質点 P が質点 A, B の円運動に及ぼす影響は無視できるものとする。質点 P には問題 I で導出した慣性力に加え、質点 A, B からの万有

引力が働く。このとき xyz 系では、速度および加速度がいずれも 0 の状態で質点 P が静止し得る点が存在する。このような点はラグランジュ点と呼ばれ、そのうちの一つ（L_2 と呼ぶ）は、x 軸上の $x > x_B$ なる領域に存在する。L_2 の x 座標を x_L とする。

(6) 万有引力と慣性力の x 成分に注目し、x_L が満たすべき方程式を求めよ。解答には $G, M_A, M_B, \omega, x_A, x_B$ を用いてよい。

(7) x_L と a との比を $\tilde{x} = x_L/a$ とすると、$\tilde{x}$ が満たす方程式は

$$\tilde{x} = \frac{\boxed{\text{(a)}}}{(\tilde{x} + \boxed{\text{(b)}})^2} + \frac{\boxed{\text{(b)}}}{(\tilde{x} - \boxed{\text{(a)}})^2}$$

と書ける。(a), (b) に入る式を β のみを用いて答えよ。

(8) β が十分小さいとき、L_2 は質点 B 付近に存在し、$x_L = x_B + \delta \cdot a$（$0 < \delta \ll 1$）と表せる。この関係式を (7) の方程式に代入し、β について解くことで、β を δ の最低次の近似で表せ。

(9) 問題 III の設定のもとで、質点 A として太陽（$M_A = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$）、質点 B として地球（$M_B = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$）を考える。太陽のまわりの地球の運動が $a = 1.50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ の円運動であるとして、(8) の結果を用いて地球から L_2 までの距離を有効数字 2 桁で求めよ。

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

I. 電荷密度と電流密度が 0 の真空中では、位置 $\vec{x}$、時刻 t における電場 $\vec{E}(\vec{x},t)$、磁束密度 $\vec{B}(\vec{x},t)$ は、次のマクスウェル方程式を満たす。

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \tag{i}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{ii}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{iii}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{iv}$$

ここで、ϵ_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率で、いずれも正の定数である。

複素数表示で

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)\right] \tag{v}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}_0\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)\right] \tag{vi}$$

と表される平面電磁波について以下の問に答えよ。ここで $\vec{E}_0$、$\vec{B}_0$ は振幅を表す実数の定数ベクトル、$\vec{k}$ は実定数の波数ベクトル、$\omega(>0)$ は実定数の角振動数である。

(1) この電磁波が横波 ($\vec{B}\perp\vec{k}$、$\vec{E}\perp\vec{k}$) であることを示せ。

(2) $\vec{k}\times\vec{E}=\boxed{\text{(A)}}\vec{B}$、$\vec{k}\times\vec{B}=\boxed{\text{(B)}}\vec{E}$ である。$\boxed{\text{(A)}}$ と $\boxed{\text{(B)}}$ を、ω、ϵ_0、μ_0 のうち適切なものを使って答えよ。

(3) この電磁波の速さが $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ となることを示せ。

II. 導体中を伝播する電磁波を考える。その導体中では、マクスウェル方程式が次のように書けるとする。

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \tag{vii}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{viii}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{ix}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\epsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\vec{j} \tag{x}$$

ここで、$\vec{j}(\vec{x},t)$ は電流密度である。ϵ、μ はそれぞれ導体の誘電率と透磁率で、いずれも正の定数とする。このとき以下の問に答えよ。必要に応じて $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{X})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{X})-\vec{\nabla}^2\vec{X}$ の関係を用いてよい ($\vec{X}$ は任意のベクトル場)。

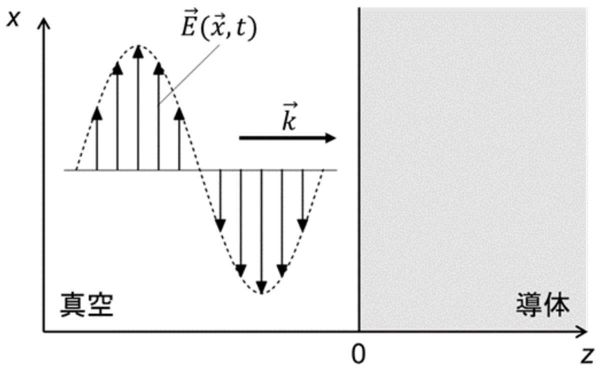

図 1

(4) 導体中ではオームの法則 $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ が成り立つとする。ここで、σ は電気伝導度で、正の定数である。オームの法則とマクスウェル方程式から、電場に関する方程式

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{xi}$$

を導出せよ。

(5) 図 1 に示すように、$z \geq 0$ の半無限領域に導体があり、xy 平面で真空と接している。この導体に対して、電磁波が $+z$ 方向に入射する。導体内の電場 $\vec{E}(\vec{x},t)$ が複素数表示で、

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \exp\left[i\left(kz - \omega t\right)\right]$$

と表されるとする。ここで、$\vec{E}_0 = (E_0, 0, 0)$ で $E_0(> 0)$ は実数の定数、k は複素数の定数、$\omega(> 0)$ は実数の定数である。k^2 を ω、ϵ、μ、σ を用いて表せ。

(6) (5) において 準定常電流近似 $\epsilon\omega/\sigma \ll 1$ が成り立つ場合を考える。このとき (xi) 式の右辺第一項の寄与を無視できる。$k = k_1 + ik_2$ (k_1、k_2 は実数) と表すとき、k_1 および k_2 を求めよ。

(7) (6) のとき、$z > 0$ における電場の振幅を z の関数として求めよ。

(8) 導体が電気抵抗率 $1/\sigma = 3.6 \times 10^{-8}\ \Omega\ \mathrm{m}$、透磁率 $\mu = 1.2 \times 10^{-4}\ \mathrm{H\ m^{-1}}$ を持つとする。(7) の結果を用いて、周波数 955 kHz の電磁波の電場の振幅が $1/e$ 倍となる距離 d を、有効数字 1 桁で計算せよ。

III. 超伝導体内部でも、マクスウェル方程式 (vii) $\sim$ (x) が成立しているとする。また超伝導体内では、オームの法則が成立せず、次の式に置き換えられる。

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{\Lambda}\vec{E} \tag{xii}$$

ここで Λ は正の定数である。このとき、以下の問に答えよ。

(9) (xii) 式とマクスウェル方程式から、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{j}+\frac{1}{\Lambda}\vec{B}\right)=0$$

となることを示せ。

(10) 以下、電磁場が時間によらない場合を考えよう。$z \geq 0$ の半無限領域に超伝導体があり、xy 平面で真空と接している。この系に対して、一様な定常磁場を x 方向に加える。境界面 $z=0$ では、磁束密度は $\vec{B}=(B_0,0,0)$ であるとする。超伝導体内部では、ロンドン方程式

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}+\frac{1}{\Lambda}\vec{B}=0$$

が成立するとして、マクスウェル方程式を使って、$z \geq 0$ の領域における磁束密度の x 成分 $B_x(z)$ を求めよ。

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

問題3

量子力学に関する以下の問いに答えよ。必要であればガウス積分に関する公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x-\mu)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}} \ (b>0\,,\ \mu \text{ は複素数}) \tag{i}$$

を用いてもよい。

I. 1次元の調和ポテンシャルの下で運動する質量 m の質点の量子力学を考える。質点の位置を x、運動量を p、調和ポテンシャルの角振動数を $\omega(>0)$ として、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{ii}$$

で与えられる。ハミルトニアンの固有状態、固有値を $|n\rangle$、ε_n $(n = 0, 1, 2\cdots)$ とする。

(1) 座標表示 (x 表示) の運動量演算子

$$p = -i\hbar\frac{d}{dx} \tag{iii}$$

が交換関係 $[x, p] = i\hbar$ を満たすことを示せ。

(2) 消滅演算子を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \tag{iv}$$

で定義すると、基底状態 $|0\rangle$ は $a\,|0\rangle = 0$ を満たす。これより基底状態の波動関数 $\varphi_0(x)$ が満たす微分方程式を導け。

(3) 前問で求めた微分方程式を解き、規格化された基底状態の波動関数 $\varphi_0(x)$ を求めよ。

(4) 基底状態の波動関数 $\varphi_0(x)$ を定常状態のシュレーディンガー方程式に代入し、基底状態のエネルギー ε_0 を求めよ。

(5) 基底状態での x^2 の期待値 $\langle x^2\rangle_0 = \langle 0|x^2|0\rangle$ を求めよ。

(6) 任意の波動関数 $\varphi(x)$ に対して、パリティ変換の演算子 $\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}\varphi(x) = \varphi(-x)$ で定義する。基底状態の波動関数 $\varphi_0(x)$ が $\mathcal{P}$ の固有関数であることを示し、その固有値 P_0 を求めよ。

(7) 生成演算子

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right) \tag{v}$$

は、$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ という関係を与える。これを用いて、励起状態の波動関数 $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $\mathcal{P}$ の固有関数であることを示し、その固有値 P_n を求めよ。 ヒント: $\varphi_j(x)$ が $\mathcal{P}$ の固有関数（固有値 P_j）であると仮定して、$\varphi_{j+1}(x) \propto a^\dagger\varphi_j(x)$ について、$\mathcal{P}\varphi_{j+1}(x)$ を考えよ。

II. 状態が式 (ii) のハミルトニアンの固有状態 $|n\rangle$ であるときに、質点に撃力を作用させて運動量 $\hbar k$ を与えた。撃力の作用後の状態を $|\psi\rangle$ で表す。

(8) 運動量の固有状態 $|p\rangle$ に同じ撃力を作用させると $|p+\hbar k\rangle$ となる。$|n\rangle$ を $|p\rangle$ で展開すると、$|n\rangle = \sum_p |p\rangle \langle p|n\rangle$ となること (平面波展開) を用いて、$|\psi\rangle = e^{ikx}|n\rangle$ となることを示せ。

(9) 撃力の作用後も状態が $|n\rangle$ に留まる確率 $P(n \to n) = |\langle n|\psi\rangle|^2$ を x^2 の期待値 $\langle x^2\rangle_n = \langle n|x^2|n\rangle$ と k を用いて表せ。ただし、k の 3 次以上の項は無視する (長波長近似)。

(10) 問 (3) で求めた調和振動子の基底状態の波動関数 $\varphi_0(x)$ を用いて、長波長近似を<u>用いずに</u>、$P(0 \to 0)$ を $\langle x^2\rangle_0$ と k で表せ。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

問題 4

xy 平面に閉じ込められた自由電子からなる系の磁性を考える。系の面積を S とし、z 方向に一様定常な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ $(B \geq 0)$ がかかっているとする。磁束密度によって生じる磁化には、軌道運動による軌道磁化とスピンによるスピン磁化の 2 つが考えられる。以下、電子の質量を m、電荷を $-q$ $(q > 0)$、プランク定数を 2π で割った値を $\hbar$、ボーア磁子を $\mu_{\mathrm{B}} = \hbar q/2m$、ボルツマン定数を k_{B}、温度を T、逆温度を $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$、自然対数を ln とする。電子間相互作用は無視する。

I. まず軌道運動の寄与を無視し、量子統計力学を用いてスピン磁化を考える。1 電子ハミルトニアンは $h(\vec{p}, \sigma) = \vec{p}^2/2m - \mu_{\mathrm{B}} B\sigma$ で与えられる。ここで、$\vec{p} = (p_x, p_y, 0)$ は運動量、$\sigma = \pm 1$ はスピン変数で、スピン磁気モーメントの z 成分に対応する。この問では $T = 0$ とし、フェルミエネルギーを ϵ_{F} $(\geq \mu_{\mathrm{B}} B)$ とする。

(1) $B = 0$、すなわち 1 電子ハミルトニアンが σ によらず $h_0(\vec{p}) = \vec{p}^2/2m$ で与えられる場合を考える。平面を 1 辺の長さが L である正方形 $(S = L^2)$ とし、周期的境界条件を課すと、n_x と n_y を整数として運動量は $(p_x, p_y) = (2\pi\hbar/L)(n_x, n_y)$ のように離散的な値をとる。1 スピン自由度あたりの電子数 $N_0(\epsilon_{\mathrm{F}})$、すなわち 1 電子ハミルトニアンの値が ϵ_{F} 以下であるような (p_x, p_y) の組の数を計算せよ。ただし、L は十分に大きく、離散的なエネルギー準位どうしの間隔はフェルミエネルギーに比べて十分に小さいものとする。

(2) $B > 0$ のとき、スピン変数が σ である電子には $-\mu_{\mathrm{B}} B\sigma$ のエネルギーが加わるため、その数は $N_0(\epsilon_{\mathrm{F}} + \mu_{\mathrm{B}} B\sigma)$ で与えられる。スピン変数が σ である電子は $\mu_{\mathrm{B}}\sigma$ のスピン磁気モーメントをもつことを用いて、スピン磁化、すなわち全スピン磁気モーメント M を計算せよ。

II. 次にスピンの自由度を無視して、古典統計力学を用いて軌道磁化を考える。1 電子ハミルトニアンは $h(\vec{x}, \vec{p}) = [\vec{p} + q\vec{A}(\vec{x})]^2/2m$ で与えられる。ここで、$\vec{x} = (x, y, 0)$ は位置、$\vec{A}(\vec{x}) = (0, B\,x, 0)$ はベクトルポテンシャルである。以下の問では $T > 0$ とする。

(3) 1 電子分配関数

$$z = \int_S dxdy \left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \ e^{-\beta h(\vec{x}, \vec{p})} \right],$$

を、運動量についての積分を先に行うことで計算せよ。ここで、x および y についての積分は面積 S の平面の内部で行うことを表す。必要であれば、ガウス積分が

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

となることを用いてもよい。ここで、a (> 0) と b は x によらない実数である。

(4) 全電子数を N ($\gg 1$) とすると、全系の分配関数は $Z = z^N/N!$、自由エネルギーは $F = -k_{\mathrm{B}}T \ln Z$ で与えられる。軌道磁化 $M = -\partial F/\partial B$ が 0、すなわち古典統計力学の範囲では軌道磁化が現れないことを示せ。

III. 軌道磁性を正しく理解するためには量子統計力学が必要である。$\Lambda+1$ 個の 1 電子固有状態 $|\psi_\ell\rangle$ ($\ell = 0, 1, \ldots, \Lambda$) があり、それぞれの 1 電子エネルギー固有値を ϵ_ℓ とする。パウリの排他律に従って、それぞれの状態には $n_\ell = 0$ もしくは 1 個の電子が入ることができる。系の全エネルギーと全電子数はそれぞれ

$$E = \sum_{\ell=0}^{\Lambda} \epsilon_\ell n_\ell = \epsilon_0 n_0 + \epsilon_1 n_1 + \cdots + \epsilon_\Lambda n_\Lambda,$$

$$N = \sum_{\ell=0}^{\Lambda} n_\ell = n_0 + n_1 + \cdots + n_\Lambda,$$

で与えられる。

(5) 化学ポテンシャルを μ とする。この系の大分配関数

$$\Xi = \sum_{n_0=0}^{1} \sum_{n_1=0}^{1} \cdots \sum_{n_\Lambda=0}^{1} e^{-\beta(E-\mu N)},$$

が、$\xi_\ell = 1 + e^{-\beta(\epsilon_\ell - \mu)}$ を用いて、

$$\Xi = \prod_{\ell=0}^{\Lambda} \xi_\ell = \xi_0 \xi_1 \ldots \xi_\Lambda,$$

と表されることを示せ [ヒント: $\Lambda = 1$ の場合を考えてみるとよい]。

(6) 系のグランドポテンシャルは $J = -k_{\mathrm{B}}T \ln \Xi$ で与えられる。全電子数 $N = -\partial J/\partial \mu$ を ϵ_ℓ を用いて書き下せ。

IV. 引き続きスピンの自由度を無視し、量子統計力学を用いて軌道磁化を考える。量子力学を用いた計算によると、$\ell = 0, 1, \ldots$ として 1 電子エネルギー固有値は $\epsilon_\ell = 2\mu_{\mathrm{B}} B(\ell + 1/2)$ である。さらに、各 ℓ について固有状態は $D = qBS/2\pi\hbar$ 重に縮退している。この問では $\mu_{\mathrm{B}} B \ll k_{\mathrm{B}}T$ とする。

(7) 縮退を考慮した大分配関数は、問 (5) の ξ_ℓ を用いて、

$$\Xi = \prod_{\ell=0}^{\infty} \xi_\ell^D,$$

で与えられる。グランドポテンシャルを

$$J = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi(\ell + 1/2),$$

という形に書き下し、関数 $\varphi(x)$ を求めよ。

(8) オイラーの和公式を用いると、グランドポテンシャルは

$$J = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varphi(\ell + 1/2) = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx - \frac{1}{24}[\varphi'(\infty) - \varphi'(0)] + \ldots,$$

と表される。ここで、$\varphi'(x) = d\varphi(x)/dx$ であり、$\ldots$ は $x = 0$ または $x \to \infty$ における $\varphi(x)$ の 3 階以上の微分からなる式である。第一項

$$J_0 = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx,$$

が B によらないことを示せ [ヒント: 縮退度 D が B に比例することに注意する。積分を実行する必要はない]。

(9) グランドポテンシャルを B について 2 次まで展開することで、軌道磁化 $M = -\partial J/\partial B$ を B について 1 次まで計算せよ。

（計算用余白）

（計算用余白）