理学研究科博士前期課程
(物理学専攻・宇宙地球科学専攻)

入学試験問題

物理学

令和 8 年 8 月 25 日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。答案用紙は問題ごとに 1 枚とし、それぞれに問題番号・受験番号・氏名を書くこと。

問題 1

図 1 の左図のように、鉛直上向きを z 軸とする直交座標系 (x, z) を考える。この鉛直平面内に置かれた滑らかな細いワイヤーが

$$z = ax^2 + bx^4 \qquad (a,\ b \text{ は正の定数})$$

で与えられる左右対称な（$x \to -x$ の変換に対して対称な）形状をしている。ワイヤーには穴の空いた質量 m の小球が通されており、小球はワイヤーから離れることなく、摩擦なしにワイヤーに沿ってのみ運動するものとする。

このワイヤーを z 軸のまわりに一定角速度 Ω で回転させることを考える（図 1 右図）。x-z 平面もワイヤーとともに回転させる。ワイヤーの形状は回転によって変化せず、剛体として回転するものとする。また、小球の大きさ、空気抵抗、およびワイヤーの質量は無視できるものとする。重力加速度の大きさを g とし、重力は鉛直下向き（z 軸負の向き）に働く。

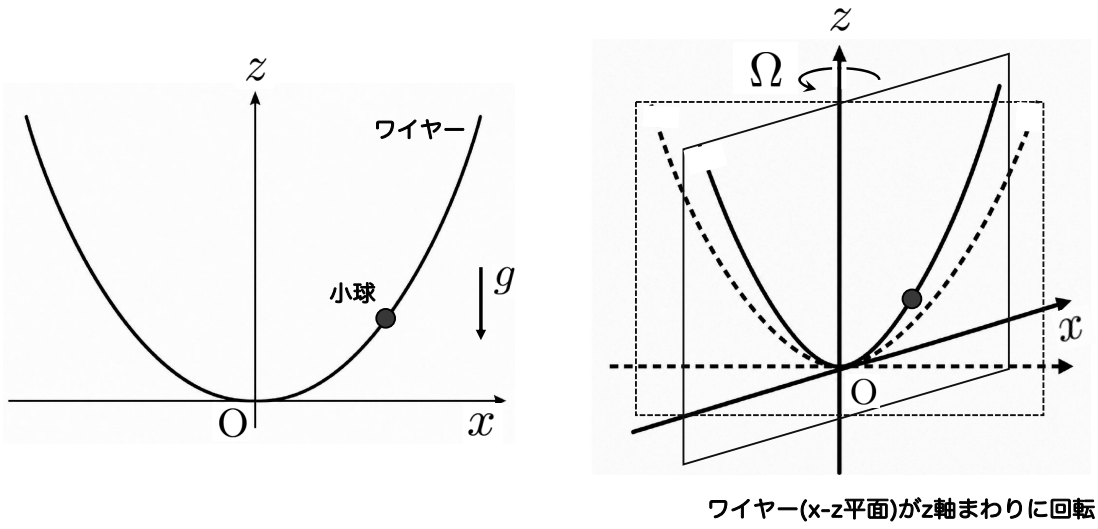


図 1

ワイヤーとともに回転する座標系から小球の運動を考えたい。小球の位置は、ワイヤーを含む回転する鉛直平面内の座標 x により表すことができる。この系では、回転による遠心効果と重力の競合によって、小球の平衡状態および安定性が角速度 Ω に応じて変化する。以下の問に答えよ。

I. まず、小球の運動をラグランジアンを用いて記述しよう。

(1) ワイヤーの形状条件

$$z = ax^2 + bx^4$$

を用いて、原点から見て静止している慣性系から見た小球の速度の二乗 v^2 を座標 x とその時間微分 $\dot{x}$ を用いて表せ。（ヒント：まず小球の速度を動径方向（回転する x 軸の方向）、鉛直方向（z 軸方向）、そして回転の接線方向に分けて考える。）

(2) この力学系のラグランジアン

$$L = T - V$$

を $x, \dot{x}$ の関数として求めよ。ただし T は問 **(1)** で求めた速度に基づく運動エネルギー、V は原点を基準点とする重力によるポテンシャルエネルギーとする。

(3) 小球の運動を一次元運動として考える。ラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2}A(x)\dot{x}^2 - U_{\text{eff}}(x)$$

と表すとき、$A(x)$ および有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(x)$ をそれぞれ求めよ。

II. 次に、この系の平衡状態とその安定性を調べよう。

(4) ワイヤーの形状の対称性に注意して、平衡点となる x をすべて求めよ。

(5) 平衡点の個数はある臨界角速度 $\Omega = \Omega_c$ を境に変化する。この Ω_c を求めよ。以下の問の解答には、この Ω_c を用いてよい。

(6) $0 < \Omega < \Omega_c$ および $\Omega > \Omega_c$ における平衡点の安定性を議論せよ。安定性は $U_{\text{eff}}(x)$ の平衡点における二階微分の符号で判定できるとしてよい。

(7) 角速度 Ω が

$$0 < \Omega < \Omega_c, \qquad \Omega > \Omega_c$$

の場合について、有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(x)$ の概形をそれぞれ図示し、安定平衡点および不安定平衡点を図中に示せ。

III. 引き続き $0 < \Omega < \Omega_c,\ \Omega > \Omega_c$ における安定平衡点の位置、ならびに、その近傍における小球の運動について考える。

(8) まず、角速度 Ω が

$$0 < \Omega < \Omega_c$$

の場合を考える。安定平衡点近傍の小球の運動は微小振幅の単振動になるとして、この単振動の角振動数 ω_1 を求めよ。

(9) 次に、角速度 Ω が

$$\Omega > \Omega_c$$

の場合を考える。安定平衡点近傍の小球の運動は微小振幅の単振動になるとして、ラグランジアンを安定平衡点のまわりで展開することにより、安定平衡点近傍における小球の微小振動の角振動数 ω_2 を求めよ。

(10) ワイヤーの回転の角速度が、臨界角速度 Ω_c から少しずれた値、

$$\Omega = \Omega_c + \delta\Omega, \qquad 0 < \delta\Omega \ll \Omega_c$$

をとるとする。安定平衡点の位置を $\delta\Omega$ の関数として表すとき、$\delta\Omega$ の最低次の項を求めよ。

(11) ワイヤーの形状の対称性に注意して、安定平衡点が Ω とともにどう変化するかを、安定平衡点の位置を縦軸、Ω ($\Omega > 0$, $\Omega \neq \Omega_c$) を横軸にとって図示せよ。

(12) 角速度 Ω が $\Omega > \Omega_c$ の場合について考える。このとき、有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(x)$ は $x \to -x$ の変換に対して不変であり、安定平衡点は $x = \pm x_0$ $(x_0 > 0)$ に現れる。このことを踏まえて、この力学系の安定平衡な状態 (小球がワイヤーに対して安定に静止している状態) では $x \to -x$ の変換の下での対称性が自発的に破れていると考えることができる理由を、有効ポテンシャルの形状および平衡状態の性質に基づいて簡潔に説明せよ。

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

地表付近の十分に狭い領域では、地磁気を一様な磁束密度とみなすことができる。座標軸 z を地磁気の向きにとり、この磁束密度を z 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z$ を用いて

$$\boldsymbol{B}_0 = B_0 \boldsymbol{e}_z \qquad (B_0 \text{ は正の定数})$$

と表す。ここでは、図 1 のように、2 個の円形コイルに電流を流すことで、原点 O 付近でこの地磁気を打ち消すことを考える。

真空中に、半径 R、巻数 N の同一の円形コイルを 2 個置く。2 個のコイルの中心はどちらも z 軸上にあり、それぞれ原点 O に関して対称な位置 $z = d/2$、および $z = -d/2$ にある (d は正の定数)。各コイル面は z 軸に垂直であり、2 個のコイルには同じ大きさの電流 I を流す。

半径 R、巻数 N の一つの円形コイルに、大きさ I の電流を流したとき、その中心を通る軸上の点に作る磁束密度の大きさは、コイル中心を原点とする軸方向座標を z' として

$$B_{\text{loop}}(z') = \frac{\mu_0 N I R^2}{2(R^2 + z'^2)^{3/2}}$$

で与えられるとする。以下では、この式を用いて 2 個のコイルが作る磁束密度を考える。真空の透磁率を μ_0、誘電率を ϵ_0 とする。

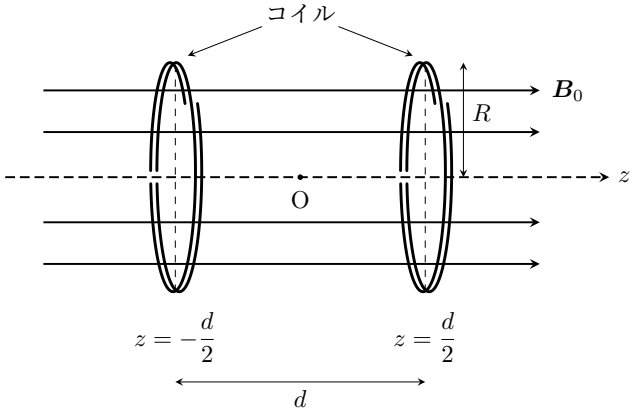


図 1

I. まず、地磁気の時間変動が無視できるとして、コイルを流れる定常円形電流が作る磁束密度について考える。

(1) 地磁気 $\boldsymbol{B}_0$ を原点で打ち消すように、2 個のコイルに電流を流す。2 個のコイルを z 軸の正の無限遠側から見たとき、電流は「時計回り」または「反時計回り」のどちらの向きに流せばよいか答えよ。

(2) 問 **(1)** で定めた電流の向きでは、2 個のコイルにより原点付近には z 軸負の向きの磁束密度が生じる。以下では、その大きさを $B_c(z) > 0$ と書き、z 軸上でコイルの作る磁束密度を $\boldsymbol{B}_c(z) = -B_c(z)\boldsymbol{e}_z$ と表す。このとき $B_c(z)$ を求めよ。

(3) 2 個のコイルの作る磁束密度の原点における大きさ $B_c(0)$ を求めよ。また、原点で地磁気を打ち消すために必要な電流の大きさ I を、B_0, R, N, d, μ_0 を用いて表せ。さらに具体例として、$B_0 = 3.1 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$, $R = 1.0\,\mathrm{m}$, $N = 100$, $d = 2.0\,\mathrm{m}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ の場合に必要な電流の大きさを、単位とともに有効数字 1 桁で求めよ。

II. 引き続き、地磁気とコイル電流が時間変化しない場合を考え、原点近傍で磁束密度がどの程度一様に打ち消されるかを調べる。原点で磁束密度を打ち消しても、原点から離れるとコイルの作る磁束密度の大きさは一般に変化する。以下では、対称性と原点付近での変化率に着目し、コイルの作る磁束密度の一様性がよくなる条件を求める。

(4) 2 個のコイルの配置の対称性を用いて、問 **(2)** で得た $B_c(z)$ を $z = 0$ のまわりでテイラー展開したとき、一次の項が現れないことを示せ。

(5) 原点近傍で $B_c(z)$ の変化をさらに小さくするため、$\dfrac{d^2B_c}{dz^2}$ の $z = 0$ における値を求め、テイラー展開の二次の項が消えるためのコイル間隔 d を求めよ。また、そのときの $B_c(0)$ を求めよ。

III. 最後に、これまで時間的に一定としてきた地磁気が変動し、それに応じてコイル電流を時間変化させる場合を考える。ここでは、原点近傍でコイルの作る磁束密度（変位電流による磁束密度は含まない）の時間変化を

$$B_c(t) = \alpha I(t)$$

と仮定し、時間変化に伴う誘導電場と、変位電流による磁束密度の空間変化を近似的に見積もる。ここで、原点近傍では磁束密度の z 依存性を無視できるとし、B_c は時間 t のみの関数としている。α は時間や位置に依存しない定数であり、$I(t)$ は時間変化するコイル電流である。

また、以下に示すファラデーの法則、およびマクスウェル・アンペールの法則を必要に応じて用いてよい。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

ここで、$\boldsymbol{E}$ は電場、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{j}$ は電流密度を表す。

(6) z 軸からの距離を r、方位角を ϕ（z 軸の正の無限遠側から原点を見たとき反時計回りを正）とする円筒座標系を導入する。原点を中心とし、z 軸に垂直な面内にある半径 $r = \rho$ の円周を考える。ただし $\rho \ll R$ とし、この円面を貫くコイルの作る磁束密度は z 軸上と同じ $-B_c(t)\boldsymbol{e}_z$ で一様とみなせるものとする。このとき、磁束密度 $B_c(t)$ の時間変化によって半径 $r = \rho$ の円周上に生じる誘導電場の方位角成分 E_ϕ を、ファラデーの法則を用いて ρ, α, dI/dt の関数として表せ。

(7) 問 **(6)** で求めた誘導電場 E_ϕ の時間変化は、マクスウェル・アンペールの法則に従って、変位電流による磁束密度 $\delta\boldsymbol{B}$ を生じる。この磁束密度は r と t にのみ依存し、$\delta\boldsymbol{B}(r,t) = \delta B_z(r,t)\boldsymbol{e}_z$ と表せるものとする。コイル電流の流れていない原点近傍を考え、この変位電流による磁束密度について、中心軸上の値との差

$$\delta B_z(\rho,t) - \delta B_z(0,t)$$

を $\dfrac{d^2I}{dt^2}$ を含む形で表せ。必要であれば、任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ に対する円筒座標系における回転

$$(\nabla\times\boldsymbol{V})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}$$
$$(\nabla\times\boldsymbol{V})_\phi = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$
$$(\nabla\times\boldsymbol{V})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\phi) - \frac{\partial V_r}{\partial\phi}\right]$$

を用いてよい。

(8) コイル電流 $I(t)$ のうち、時間変化する成分を $\Delta I\cos\omega t$ とする。ここで、ΔI は時間に依存しない定数であり、ω は一定の角振動数である。問 **(7)** で求めた $\delta B_z(\rho,t) - \delta B_z(0,t)$ の振幅が、コイルの作る磁束密度の時間変化成分の振幅 $\alpha\Delta I$ に比べて十分小さく、中心軸からの距離が ρ 程度の範囲で磁束密度を空間的に一様と近似できるためには、ω がどのような条件を満たせばよいか答えよ。

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

問題 3

質量 m の粒子の x 軸上の運動を量子力学的に考える。プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とすると、ハミルトニアンは

$$\hat{h} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

である。図 1 のように、ポテンシャル $V(x)$ は $x = \pm a$ (a は正の定数) で極小値を持ち、その近傍では近似的に $V(x) \approx \dfrac{1}{2}m\omega^2(x \mp a)^2$ と表せるものとする。また、$V(-x) = V(x)$ である。

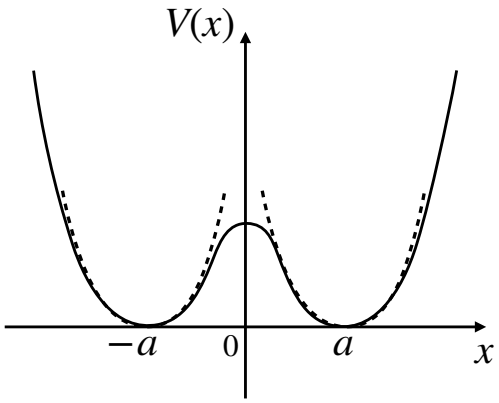


図 1

以下ではまず、粒子が一つある系を考える。

I. $x = 0$ でのポテンシャルが十分に高く、二つの井戸が完全に隔絶された調和ポテンシャルとみなせるとき、以下の問に答えよ。□ には当てはまる式を記せ。

(1) 各孤立井戸における粒子の基底状態のエネルギーは □ (a) □、第一励起状態のエネルギーは □ (b) □ である。また、この値をそれぞれ E_0 ならびに E_1 とし、以下の問を答える際に用いてよい。

(2) この系の基底状態のエネルギーとその縮退度を答えよ。

以下では左右の孤立井戸の規格化された基底状態をそれぞれ $|L\rangle$, $|R\rangle$ とする。

II. 次に $x = 0$ でのポテンシャルが有限の高さであることを考えて、以下の問に答えよ。

(3) このとき $|L\rangle$，$|R\rangle$ はトンネル効果により混ざり、状態ベクトルは

$$|\psi\rangle = c_L|L\rangle + c_R|R\rangle$$

のように書ける。状態 $|L\rangle$ と $|R\rangle$ が混ざる大きさを $\langle L|\hat{h}|R\rangle = -\epsilon$ (ϵ は正の定数) とおく。ただし、ϵ は $E_1 - E_0$ より十分小さいものとする。また、$\langle L|\hat{h}|L\rangle = \langle R|\hat{h}|R\rangle = E_0$ としてよい。$\hat{h}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ として、この系の基底状態ならびに第一励起状態のエネルギー固有値とそれぞれの規格化された状態ベクトルを求めよ。ただし、エネルギーの低い方を $|0\rangle$、高い方を $|1\rangle$ とし、$\langle L|0\rangle > 0$, $\langle L|1\rangle > 0$ となるように c_L，c_R の符号を決めよ。

(4) この一次元ポテンシャルの問題に対する、時間に依存するシュレーディンガー方程式を満たす状態ベクトルを $|\psi(t)\rangle$ と表す。時刻 $t = 0$ で $|L\rangle$ の状態にあったとする。時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle$ を、問 **(3)** で定義された状態 $|0\rangle$，$|1\rangle$ を用いて答えよ。

(5) 問 **(4)** の初期状態から時間発展し、時刻 $t = T_0 > 0$ において、$|\psi(T_0)\rangle = \alpha|R\rangle$ になったとする。このときの T_0 の最小値を求めよ。なお、α は複素数の定数である。

次に、このポテンシャルにスピン $s = \dfrac{1}{2}$ の互いに相互作用しない二つのフェルミ粒子を閉じ込めた場合を考える。問 **(3)** で定義された状態 $|0\rangle$，$|1\rangle$ を用いて、例えば粒子 1 が $|0\rangle$ の状態で粒子 2 が $|1\rangle$ の状態にあるときは $|0\rangle_1|1\rangle_2$ のように表すとき、$|0\rangle_1|0\rangle_2$, $|0\rangle_1|1\rangle_2$, $|1\rangle_1|0\rangle_2$, $|1\rangle_1|1\rangle_2$ はこの系のエネルギー固有状態である。

III. 粒子 i ($i = 1, 2$) に対するスピン演算子を $\hat{\boldsymbol{s}}_i$ として、全スピンの演算子は $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2$ である。スピンが S の状態 $|S\rangle$ に対して

$$\hat{\boldsymbol{S}}^2|S\rangle = S(S+1)\hbar^2|S\rangle$$

であり、系のスピンは $S = 0$ の一重項または $S = 1$ の三重項である。このとき、以下の問に答えよ。

(6) 次のようなスピンに関する演算子 $\hat{P}_s$ を考える。

$$\hat{P}_s = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{\hbar^2}\hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2\right)$$

演算子 $\hat{P}_s$ に対する $S = 0$ および $S = 1$ の状態の固有値を求めよ。

(7) 二つの粒子の位置座標を交換する演算子 $\hat{P}_x$ を求めたい。二粒子エネルギー固有基底 $\{|0\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |1\rangle_1|1\rangle_2\}$ を用いて演算子 $\hat{P}_x$ を行列の形で書け。ただし、基底の順序はこの順序とする。

以下ではこの二粒子系のスピンが $S = 1$ である場合を考える。

(8) 系の空間部分の規格化された状態ベクトル $|\psi_{12}\rangle$ を、問 **(7)** と同様に二粒子エネルギー固有基底を用いて答えよ。また、この $S = 1$ の状態が演算子 $\hat{P} = \hat{P}_s\hat{P}_x$ の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

(9) 一つの粒子のエネルギーを測定したとき、得られる測定値の確率分布（どのエネルギーがどれだけの確率で得られるか）を答えよ。また、この粒子に対する測定結果（$|0\rangle$ または $|1\rangle$）に応じて、もう一つの粒子のエネルギーがどのように決定されるか説明せよ。

(10) 系の空間部分の密度演算子 $\hat{\rho}_{12} = |\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}|$ を、二粒子エネルギー固有基底を用いて行列の形で書け。

(11) 粒子 2 のエネルギー状態に関して和をとったものを粒子 1 の簡約密度演算子と定義する。つまり、$\hat{\rho}_1 = {}_2\langle 0|\hat{\rho}_{12}|0\rangle_2 + {}_2\langle 1|\hat{\rho}_{12}|1\rangle_2$ である。この粒子 1 の簡約密度演算子 $\hat{\rho}_1$ を、基底 $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$ を用いて行列の形で書け。

(12) 密度演算子を用いてエントロピーを $S(\hat{\rho}) = -\mathrm{tr}(\hat{\rho}\log\hat{\rho})$ のように定義するとき、全系および部分系のエントロピー $S(\hat{\rho}_{12})$ および $S(\hat{\rho}_1)$ を計算せよ。なお、$0\log 0$ はゼロであることを用いてよい。

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

問題 4

空洞中に閉じ込められた光子気体の熱力学的性質を考えてみよう。空洞の中は真空である。以下の問に答えよ。$\boxed{}$ には当てはまる式を記せ。

I. 熱輻射の測定から、光子気体の内部エネルギーは $U = \alpha V T^4$ というステファン-ボルツマンの法則に従い、また圧力は $P = \dfrac{1}{3}\dfrac{U}{V}$ となることが既知であるとする。ここで V は空洞の体積、T は温度、α は正の定数 (無次元ではない) である。また、準静的な断熱変化において $TV^{1/3} =$ 一定 という関係式が成り立つことも既知とする。

この光子気体を作業物質とした図 1 のようなサイクル $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ を考える。$1 \to 2$、 $3 \to 4$ はそれぞれ温度 T_{H}, T_{L} の熱源に系が接して行われる準静的な等温過程で、$T_{\mathrm{H}} > T_{\mathrm{L}}$ である。一方、$2 \to 3$ と $4 \to 1$ は準静的な断熱過程である。状態 1、2 における体積をそれぞれ V_1, V_2 とする。

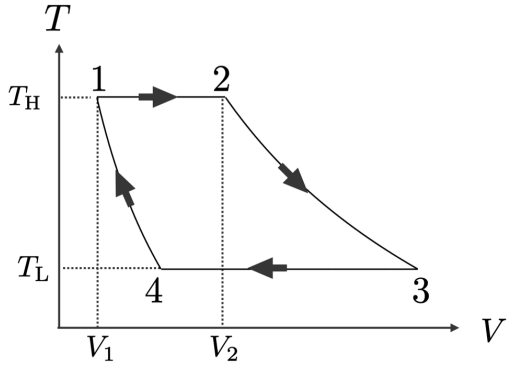


図 1

(1) 状態 3、4 での体積はそれぞれ $V_3 =$ $\boxed{\text{(a)}}$、$V_4 =$ $\boxed{\text{(b)}}$ となる。T_{H}, T_{L}, V_1, V_2 を用いて解答すること。

(2) V_3, V_4 は以下の解答記入欄には用いないこと。各過程において光子気体が外部にした仕事はそれぞれ $\Delta W_{1\to2} =$ $\boxed{\text{(c)}}$、$\Delta W_{3\to4} =$ $\boxed{\text{(d)}}$、$\Delta W_{2\to3} =$ $\boxed{\text{(e)}}$、$\Delta W_{4\to1} =$ $\boxed{\text{(f)}}$ となる。また等温過程 $1 \to 2$ で光子気体が受け取った熱量は $\Delta Q_{1\to2} =$ $\boxed{\text{(g)}}$ となる。

(3) このサイクルの熱効率 η、すなわち系が外部にした仕事と系が高温熱源から受け取った熱量の比を求め、 それが温度比 T_L/T_H のみに依存することを示せ。

II. この光子気体の熱力学を微視的に考察するための準備を行う。以下、プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。またボルツマン定数を k_{B} とする。逆温度 $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ を解答で用いてよい。

(4) 電磁場の任意の成分 $f(\boldsymbol{r},t)$ の従う波動方程式は $\left[\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right]f(\boldsymbol{r},t)=0$ で与えられる。ここで $\boldsymbol{r}$ は空間座標、t は時間、c は光速度である。以下では簡単のため、f としてある単一の成分 (例えば電場の x 成分) のみを考える。$f(\boldsymbol{r},t)$ を、その空間に関するフーリエ変換によって $f(\boldsymbol{r},t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^dk}{(2\pi)^d}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\tilde{f}(\boldsymbol{k},t)$ のように表そう。ここで d は空間次元、$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルであり、d^dk は d 次元波数空間における微小体積である。波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に付随する $\tilde{f}(\boldsymbol{k},t)$ が従う時間発展方程式を求めると $\boxed{\text{(h)}}=0$ となる。この結果から、波数 $\boldsymbol{k}$ に付随する $\tilde{f}(\boldsymbol{k},t)$ は、固有振動数が $\omega(\boldsymbol{k})=kc$ の調和振動子のように振る舞い、従って、$f(\boldsymbol{r},t)$ は、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ ごとに独立した調和振動子の集まりとみなせる。ここで k は波数ベクトルの大きさ $k=|\boldsymbol{k}|$ である。

(5) ある固有振動数 ω を持つ、単一の 1 次元調和振動子について考える。調和振動子を量子力学的に捉えるとそのエネルギー固有値は離散的になる。簡単のため以下ではエネルギー原点を取り直し、基底状態のエネルギーを 0 とする。分配関数 $Z(\omega)$ とヘルムホルツの自由エネルギー $F(\omega)$ を求めよ。

(6) 空洞中で許される定在波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に関する和を $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}}$ と表すことにし、波数ベクトルの大きさ $k=|\boldsymbol{k}|$ の分布関数を

$$D(k)=\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(k-|\boldsymbol{k}|)$$

のように導入する。ここで $\delta(x)$ はデルタ関数である。光子気体はこのような様々な波数に対応した調和振動子の集まりとみなせる。光子気体のヘルムホルツの自由エネルギー F を $D(k)$ を用いた積分で表せ。体積 V は十分大きいとし、このとき、任意の関数 $A(k)$ について $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}}A(k)=\int_0^{\infty}dkD(k)A(k)$ が成立することを用いよ。

III. 光子気体の熱力学的性質を統計力学的に解析しよう。空間は d 次元とする。

(7) 空洞の差し渡しの長さを $L=V^{1/d}$ としたとき、波数ベクトルの大きさ k の下限は $k_{\mathrm{m}}=1/L$ 程度である。問 **(6)** で導入した分布関数 $D(k)$ が近似的に

$$D(k)=\frac{1}{k_{\mathrm{m}}}\left(\frac{k}{k_{\mathrm{m}}}\right)^{d-1},\qquad k_{\mathrm{m}}=L^{-1}$$

のように表せるとしよう。全体の数係数まで正確ではないが以下においては本質的でないので簡単化している。 これを用いて光子気体のヘルムホルツの自由エネルギー F を、以下で定義された積分 $I(\gamma)$ を用いて表せ。

$$I(\gamma)=\int_0^{\infty}dy\frac{y^{\gamma}}{\exp(y)-1}$$

(8) この光子気体の圧力 P、エントロピー S、内部エネルギー U、およびギブスの自由エネルギー $G = F + PV$ を求めよ。結果は問 **(7)** で定義された積分 $I(\gamma)$ を用いて記せ。

(9) **I**. において、ステファン-ボルツマンの法則 $U = \alpha V T^4$、圧力が $P = \dfrac{1}{3}\dfrac{U}{V}$ となること、また断熱過程において $TV^{1/3} =$ 一定 となることを仮定した。これらが $d = 3$ において成立していることを問 **(8)** の結果を用いて示せ。

(10) 単位体積あたりの内部エネルギーを $\dfrac{U}{V} = \displaystyle\int_0^\infty d\omega u(\omega)$ のように光子の振動数 ω で分解して表示したときの $u(\omega)$ を求めよ。これはプランクの法則と呼ばれるものである。$d = 3$ の場合についてプランク分布 $u(\omega)$ を図示せよ。グラフの概略がわかればよい。

(11) 空洞として一辺の長さが L の箱 (d 次元立方体) を考え、箱の壁では電磁場の各成分が $f(\boldsymbol{r}, t) = 0$ となる境界条件のもとで、問 **(7)** で仮定した分布関数を、数係数まで含めて導け。d 次元における半径 1 の球の体積を V_d とせよ。また簡単のため、電磁場としては単一の成分による寄与のみを考えればよい。

（計算用余白）

（計算用余白）