大学院前期 (修士) 課程（物理学専攻、宇宙地球科学専攻）入試問題

物 理 学 A1

（平成 11 年 9 月）

A1-1 と A1-2 の 2 問題とも解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

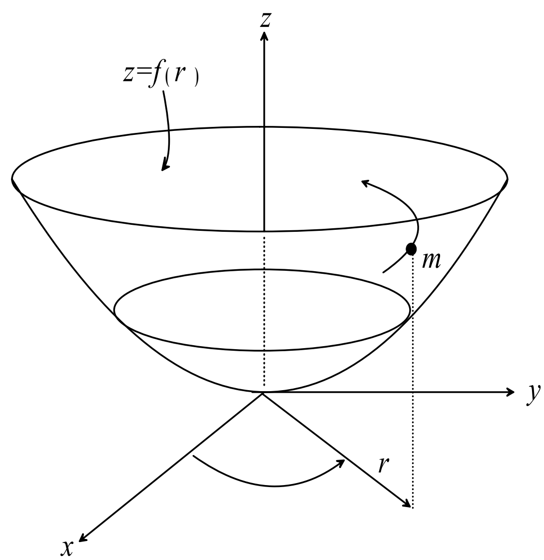
A1-1

重力場中を自由に運動する質量 m の質点のラグランジアンを L_0 とする。L_0 はデカルト座標 (x, y, z) を使うと

$$L_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m\,g\,z$$

で与えられる。ここで $z = 0$ を位置エネルギーの原点とし、重力加速度の絶対値を g とした。

さて, 図のようにこの質点が z 軸回りに回転対称な滑らかな曲面上に拘束されている場合の運動について考察しよう。



(1) $x = r\cos\phi$、$y = r\sin\phi$ によって円柱座標 (r, ϕ, z) を導入する。上で与えた質点が曲面に拘束されていないときのラグランジアン L_0 を、力学変数 (r, ϕ, z) を用いて $L_0 = L_0(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}, z, \dot{z})$ の形に書き直せ。

(2) 曲面を与える関数を $z = f(r)$ とする．この拘束条件を L_0 に代入して、この系のラグランジアンを力学変数 (r, ϕ) で表せ。

(3) (2) で求めたラグランジアンの持つ対称性から分かるように、この拘束系にはエネルギー E の他に z 軸回りの角運動量 J_z （ϕ の共役運動量）が保存量として存在する。これら保存量の表式を与え、それらを使って r 方向の運動を決定する式（r 方向の運動の第一積分）を導け。

(4) 関数 f が下に凸である（すなわちすべての $r \geq 0$ に対して $f''(r) > 0$ を満たす）時、与えられたゼロでない角運動量 J_z に対して取り得るエネルギーには最小値 E_{min} がある。このエネルギーの最小値 $E = E_{min}$ で決まる運動はどのような軌道を描くか、理由をつけて述べよ。

(5) $f(r) = \dfrac{r^2}{2\ell}$ のとき、$J_z > 0$ としてエネルギーの最小値 E_{min} を g、ℓ、J_z を用いて表せ。

A1-2

以下の問題 (1)、(2) に解答せよ。

(1) 2次元ポテンシャルが

$$V(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right) & (x>0)\\ +\infty & (x<0)\end{cases}$$

で与えられる場合、この中を運動する質量 m の量子力学的粒子の n 番目 $(n=0,1,2,\cdots)$ のエネルギー準位を与える表式とその縮退度を求めよ。答および結論に至る簡単な理由を記すこと。

(2) 同じく質量 m の量子力学的粒子に対し、今度は有限の深さの1次元井戸型ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}-V_0 & (|x|<a)\\ 0 & (|x|>a)\end{cases}$$

を考える。ただし $V_0>0$ 。エネルギーが負の状態（束縛状態と呼ぶ）は、無次元量 $mV_0a^2/\hbar^2$ の値にかかわらず少なくとも1つ存在することを示せ。基底状態のエネルギー準位を、$mV_0a^2/\hbar^2\ll 1$ の場合に、この微小量に関して最低次の範囲で求めよ。

大学院前期(修士)課程（物理学専攻、宇宙地球科学専攻）入試問題

物 理 学 A2

（平成 11 年 9 月）

A2-1 と A2-2 の 2 問題とも解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

A2-1

静止している電子 (質量 m、電荷 e) に平面波の電磁波が入射すると、その電場により電子が振動する。その結果、電子が加速度を受けるので、球面波の電磁波を輻射する。これは、電子がある面積に入射した平面波の電磁波エネルギーを全て球面波の電磁波エネルギーに変換して輻射したものとみなせる。この時の面積を電子のトムソン散乱断面積と言う。また、ϵ_0 で真空の誘電率、c で真空中の光速を表す。以下の問題に答えよ

(1) 平面波として空間を z 軸方向に伝播する電磁波を考える。つまり、その電場 $\mathbf{E}$ は x 軸成分 E_x 以外は 0 で、$E_x = E_0 \sin(k(z-ct))$ とする。この時、磁場 (磁束密度 $\mathbf{B}$) は、y 軸方向成分しかなく、$B_y = E_x/c$ になることをマックスウェル方程式を使って示せ。

(2) この電磁波のエネルギー流密度を表すポインティングベクトル $\mathbf{S}_{\rm in}$ の大きさの時間平均を求めよ。

(3) 電子が加速度 $\boldsymbol{a}$を受けた時、電子から十分に遠い点 $\boldsymbol{r}$での $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ は次式のように与えられる。このときの $\mathbf{S}_{\rm out}$ の向きと、その大きさの方向依存性を求めよ。

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\frac{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})}{r^3}, \qquad \mathbf{B} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0\, c^3}\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{r^2}, \qquad r = |\boldsymbol{r}|$$

(4) 前問の電子が単位時間あたりに輻射する全エネルギーを求めよ。

(5) 静止している電子に、(1) で与えた平面波の電磁波が入射する。この結果、電子は振動し、球面波の電磁波を輻射する。時間平均した単位時間あたりの全輻射エネルギーを求めよ。

(6) 以上のことを使って、電子のトムソン散乱断面積を求めよ。

A2-2

両端の固定された1本の弦が，ある温度の下で熱による乱雑な振動を行っている．そのような熱振動の様子を量子統計にもとづいて考えてみよう．この弦の任意の振動（横波を考える）は角振動数 ω の基本振動とその高調波（角振動数 2ω，3ω，$\ldots$）の重ね合わせで表すことができる．基本振動およびすべての高調波は互いに独立な調和振動子と考えることができる．これらの振動が温度 T で熱平衡の状態にあるものとして以下の問いに答えよ．横波には2個の自由度があるが，このことについては考慮する必要はない．ボルツマン定数を k とする．

(1) 第 m 番目の高調波（基本振動を $m=1$ とする）を一つの調和振動子と考えて，この高調波に対する分配関数（状態和）$Z_m(T)$ を量子統計に従って求めよ．

(2) 第 m 番目の高調波の平均エネルギーを温度 T の関数として求めよ．ただし，平均エネルギーは第 m 番目の調和振動子の基底状態のエネルギー値から測るものとする．

(3) 与えられた温度のもとで，それぞれの高調波はある平均エネルギーを持っている．最大の平均エネルギーを持つ高調波は第何番目の高調波か．

(4) あらゆる高調波が励起される可能性があるとしたとき，十分高温で弦の平均エネルギーが T^2 に比例することを示せ．また，低温（$kT \ll \hbar\omega$）で平均エネルギーはどのように表されるか．