

物理学

(平成18年8月28日)

1 から 4 までのすべての問題に解答せよ。解答用紙は問題ごとに一枚とし、それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと。

問題 1

荷電粒子を空間的に閉じこめるために静磁場を用いることを考えよう。磁束密度を \vec{B} とし、荷電粒子は電荷 q ($q > 0$)、質量 m をもち、その速度を \vec{v} とする。また、重力の効果、および磁場中の荷電粒子の運動による電磁波の放射は無視する。

- (1) 荷電粒子に働く力 \vec{F} を、 \vec{v} , \vec{B} を含む式で示せ。
- (2) 運動エネルギー $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ の微小時間 dt での微小変化 dK は、 $dK = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$ である。これを用いて、運動エネルギーが保存していることを示せ。

以下では、円柱 (円筒) 座標系 (r, θ, z) を用いる。 \vec{F} , \vec{v} , \vec{B} の円柱座標系での成分表示をそれぞれ、 (F_r, F_θ, F_z) , (v_r, v_θ, v_z) , (B_r, B_θ, B_z) とする。ここで、 z 軸の正の方向から見て反時計回りが、 θ の正の向きである。また、 $B_z > 0$ とする。

まず、 z 軸に平行で一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ が存在する場合を考えよう。

- (3) z 軸を中心とするらせん運動をしている荷電粒子を考える。この運動の x - y 平面への射影は円運動となる。この円運動の半径を v_θ を含む式で表せ。また、 v_θ は正か負か述べよ。
- (4) この円運動の周期 T を求め、それが荷電粒子の速度によらないことを示せ。

次に、図 1 に示すような、 z 軸のまわりに軸対称で非一様な磁場を考える。この場合、 B_r は一般にはゼロでない。また、 B_r は θ によらず、 $B_\theta = 0$ である。図 2 に示すように、 $|z|$ が大きくなるにつれて B_z は大きくなる。 B_z は z 軸に垂直な平面内では一様で、 $|z|$ だけの関数となっている。 B_z の z 依存性は十分に緩やかで、荷電粒子の運動の x - y 平面への射影は、1 周期の範囲では円運動と近似できる場合を考える。この近似的な円運動の中心は z 軸上にあり、荷電粒子は近似的にらせん運動をしている。

- (5) 荷電粒子に働く力 \vec{F} の 3 つの成分 (F_r, F_θ, F_z) を求めよ。また、 F_z の符号を $z > 0$, $z < 0$ の 2 つの領域に分けて示せ。さらに、その理由を、求めた F_z の表式をもとに説明せよ。このことにより、 z 方向の運動についても粒子を閉じこめることが可能であることがわかる。

(6) 運動エネルギーの保存から

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) &= -d\left(\frac{1}{2}mv_z^2\right) \\ &= -F_z dz \end{aligned}$$

である。ここで、 $v_{\perp}^2 = v_{\theta}^2 + v_r^2$ である。これを用いて、

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right)}{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2} = \frac{dB_z}{B_z} \quad (1)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\text{div}\vec{B}=0$ を用いて導かれる関係式 $B_r = -\frac{1}{2}r \frac{dB_z}{dz}$ を使ってよい。また、運動の $x-y$ 平面への射影は円運動で近似できるため、 $|v_r| \ll |v_{\theta}|$ 、 $|\dot{v}_r| \ll \frac{v_{\theta}^2}{r}$ としてよい。

(7) 式 (1) の両辺を積分すると、以下の式が得られる。

$$\frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B_z} = \text{一定} \quad (2)$$

ここで、 $B_z(z)$ が $B_z(z) = az^2 + B_0$ (a, B_0 は正の定数) で与えられるとする。また、 $z = 0$ における荷電粒子の速度を $\vec{v}_0 = (0, v_{\theta 0}, v_{z 0})$ とする。このとき、 z 軸方向の運動の周期 τ を、式 (2) と運動エネルギーの保存を用いて、 $a, B_0, v_{\theta 0}$ を含む式で表せ。

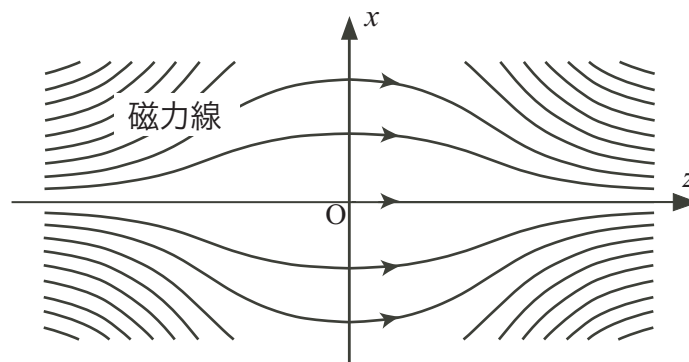


図 1

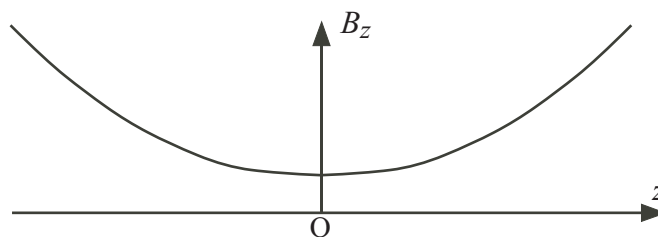


図 2

問題 2

外と熱のやりとりがない断熱されたシリンダー-ピストン系の中に、 N 個の単原子分子からなる気体が入っている。以下で、初期状態とは、温度 T_0 、体積 V_0 の熱平衡状態を指す。以下の設問に答えよ。

まず、気体を理想気体として考える。

- (1) 準静的過程に対する熱力学第一法則

$$TdS = dU + pdV$$

より、エントロピー S を、温度 T と体積 V の関数として求めよ。ただし、初期状態でのエントロピーを S_0 とする。また内部エネルギー U と状態方程式は、ボルツマン定数 k_B と圧力 p を用いて、それぞれ $U = \frac{3}{2}Nk_B T$ と $pV = Nk_B T$ で与えられる。

- (2) 初期状態からの準静的断熱過程に対して成り立つ T, V, T_0, V_0 の間の関係式を求めよ。
- (3) 初期状態から準静的にピストンを引き、体積を $2V_0$ に変化させた。その後、準静的にピストンを押し、体積を V_0 に戻した。この断熱過程における系の温度変化を、過程の途中も含め、横軸に体積 V 、縦軸に温度 T をとって、グラフに図示せよ。
- (4) 初期状態から、気体が追従できないほど急激にピストンを引いて断熱自由膨張させ、体積を $2V_0$ に変化させた。気体が熱平衡状態になったのち、準静的にピストンを押し、体積を V_0 に戻した。最終の温度を求めよ。

実際の気体は理想気体ではない。以下では、理想気体からのずれを生む効果のひとつを考えてみよう。気体を構成する単原子分子には有限の大きさがあり、2つの単原子分子は同時に同じ場所を占めることができない。この効果を平均的に取り入れた分配関数 Z は、

$$Z = \frac{1}{N!} \left(\frac{V - aN}{\lambda^3} \right)^N$$

と書ける。ここで、 a は1つの単原子分子が占める体積である。また λ は熱的ドブロイ長であり、定数 b を使って $\lambda = b/\sqrt{T}$ と書ける。

- (5) 内部エネルギー U とエントロピー S を計算せよ。 N が十分に大きいときに成り立つスターリングの公式 $\ln N! \sim N(\ln N - 1)$ を用いよ。
- (6) この気体に対して設問 (4) と同じ操作をした。最終の温度を求めよ。
- (7) 設問 (6) で求めた温度の、数密度 $\frac{N}{V_0}$ に対する依存性を、低密度極限と高密度極限の場合に分けて述べよ。

問題 3

電磁力を使い、重力にさからって物体を浮かせる方法を考える。以下の設問に答えよ。ただし、 z 軸は鉛直方向とし、上向きを正とする。

[I] 図 1 に示すように、原点を中心とし、 $x-y$ 平面上にある半径 r の円形の輪 C が、線密度 λ ($\lambda > 0$) で一様に帯電している。また、 z 軸上を自由に動ける、電荷 q ($q > 0$)、質量 m の点電荷がある。この点電荷を浮かせるために必要な条件を考えよう。ただし、真空の誘電率を ϵ_0 、重力加速度を g とする。

- (1) 輪 C が z 軸上に作る電場の z 成分 $E_z(z)$ を求めよ。
- (2) $|E_z(z)|$ の最大値と、その最大値を与える z を、それぞれ求めよ。
- (3) この点電荷に働く力が、 z 軸上のどこかで釣り合うための、比電荷 $\frac{q}{m}$ に対する条件を求めよ。
- (4) 設問 (3) の条件が満たされ、かつ釣り合いの位置が $z = z_1, z_2$ ($z_1 > z_2$) の 2 点ある場合、どちらが安定に静止できる位置かを、理由とともに述べよ。

[II] 図 2 に示すように、 $x-y$ 平面内に、原点を中心とする半径 r_1 の円形の輪 C_1 がある。また、 z 軸を中心とする半径 r_2 の円形の輪 C_2 があり、輪 C_2 は輪 C_1 に対して平行に保たれている。輪 C_1 、 C_2 はともに導体できており、輪 C_2 の一周の電気抵抗は R である。また、輪 C_2 の線の太さは r_2 に比べて十分小さい。

輪 C_1 に交流電流を流して導体の輪 C_2 を浮かせたい。そのために、以下では、輪 C_2 を高さ $z = h$ ($h > 0$) に固定し、輪 C_2 が交流電流から受ける力を求めよう。

- (5) 導体の輪 C_2 をつらぬく磁束 Φ は、それを作る電流に比例する。時刻 t における磁束 Φ のうち、輪 C_1 を流れる電流 $I_1(t)$ によって作られるものを $\Phi_{12}(z, t) = M_{12}(z)I_1(t)$ 、輪 C_2 を流れる電流 $I_2(t)$ によって作られるものを $\Phi_{22}(t) = L_2I_2(t)$ とする。ただし、磁束は上向きを正、電流 I_1, I_2 は上から見て反時計回りを正とする。輪 C_2 に生じる起電力 $V(t)$ を、 $\Phi_{12}(h, t)$ と $\Phi_{22}(t)$ を用いて表せ。
- (6) 円 C_1 を流れる交流電流を $I_1(t) = I_0 \cos \omega t = I_0 \operatorname{Re} \exp(i\omega t)$ と表すと、輪 C_2 を流れる電流は $I_2(t) = I_C \cos(\omega t + \delta) = I_C \operatorname{Re} \exp(i\omega t + i\delta)$ で表せる。ただし、 I_0, I_C は正の実数である。位相差 δ を、 $\omega, M_{12}(h), L_2, R$ の中から必要なものを用いて表せ。
- (7) 高さ h で z 軸からの距離 r_2 の位置における、磁束密度 \vec{B} の動径方向成分は、 $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ より、

$$B_r(h, t) = -\frac{1}{2\pi r_2} \frac{\partial \Phi_{12}(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h}$$

である。高さ h にある輪 C_2 が、電流 $I_1(t)$ から受ける力の z 成分 $F(h, t)$ を、 $I_1(t), I_2(t), M_{12}, \frac{dM_{12}(z)}{dz} \Big|_{z=h}$ のうち必要なものを含む式で表せ。

- (8) 力 $F(h, t)$ の時間平均 $\bar{F}(h)$ が正であることを示せ。その結果、輪 C_2 を十分に軽くすれば浮かせることができる。

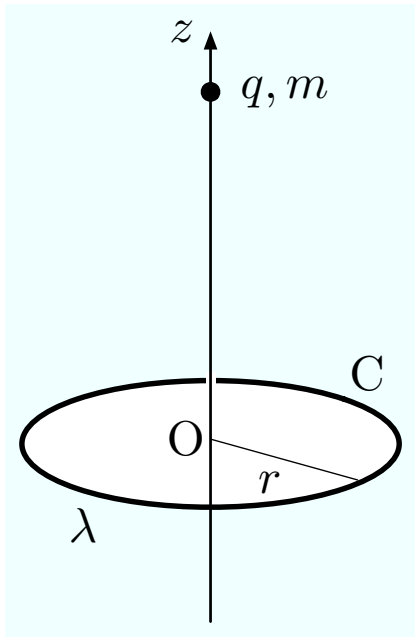


图 1

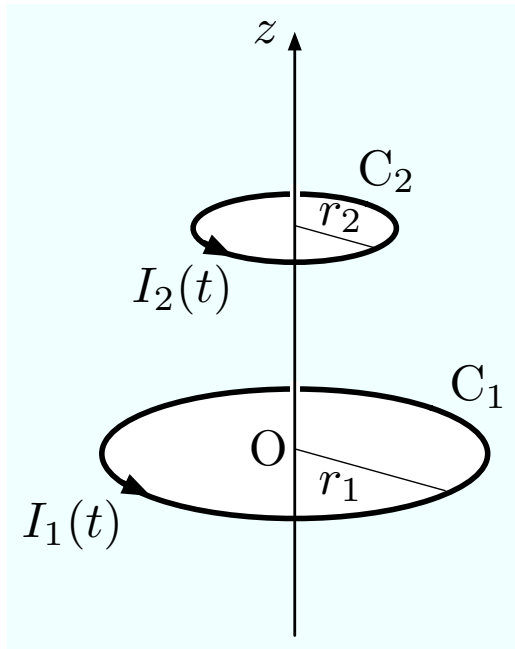


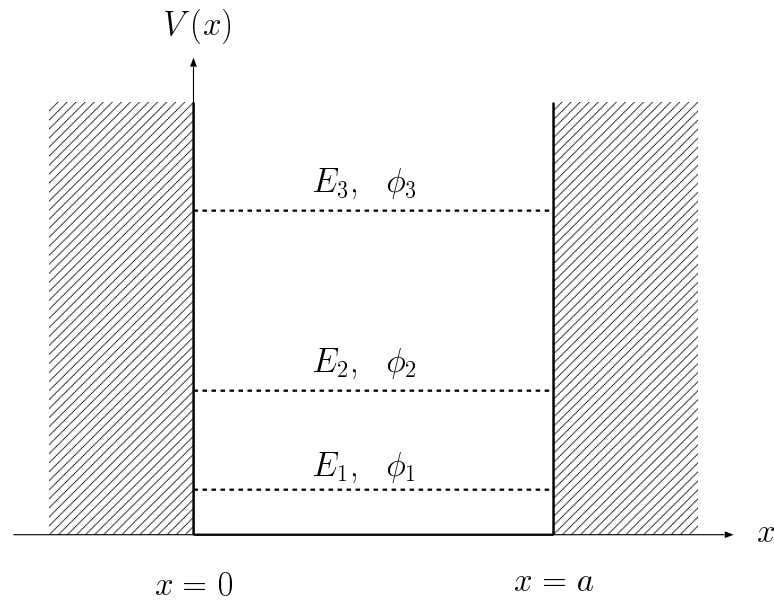
图 2

問題4

1次元空間で、無限に高い井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ +\infty & (x \leq 0, a \leq x) \end{cases}$$

の中に閉じこめられた粒子の量子力学を考える。



まず初めに、質量 m の1個の粒子をこの井戸の中に閉じこめる。

- (1) この系の、エネルギーの低い方から n 番目 ($n = 1, 2, 3, \dots$) の固有状態のエネルギー E_n と、規格化された固有関数 $\phi_n(x)$ ($0 < x < a$) を求めよ。

次に、質量が m_1, m_2 の互いに区別できる2つの粒子を、同じ井戸の中に閉じこめたとしよう。ただし、粒子のスピン自由度は無視し、また、2つの粒子間の相互作用はないものとする。

- (2) それぞれの粒子の座標を x_1, x_2 として、この2粒子系の波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ が従う時間に依存しないシュレーディンガー方程式を、 $V(x_1), V(x_2)$ を用いて書き下せ。ただし、エネルギー固有値を E とする。
- (3) $\psi(x_1, x_2)$ が $\psi(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)$ と書けるものとして、 $f(x_1)$ と $g(x_2)$ が従うシュレーディンガー方程式を、それぞれ書き下せ。ただし、それぞれのエネルギー固有値を、 $\varepsilon_f, \varepsilon_g$ とする。さらに、設問(2)の E と $\varepsilon_f, \varepsilon_g$ との関係を示せ。
- (4) この2粒子系の基底状態のエネルギー E_{gs} を求めよ。また、対応する規格化された固有関数 $\psi_{\text{gs}}(x_1, x_2)$ を、設問(1)で求めた $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ のうち必要なものを用いて表せ。
- (5) 同じ系の第1励起状態、第2励起状態のエネルギー、 $E_{1\text{st}}, E_{2\text{nd}}$ を、それぞれ求めよ。また、それぞ

れに対応する固有関数 $\psi_{1st}(x_1, x_2)$, および $\psi_{2nd}(x_1, x_2)$ を, 設問 (1) で求めた $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ のうち必要なものを用いて表せ。ただし, $m_1 < m_2 < \frac{8}{3} m_1$ とする。

次に, 同一の質量 m を持つ, スピンが $1/2$ の互いに区別できない 2 個のフェルミ粒子を, 同じ井戸の中に閉じこめる。ここでも, 2 つの粒子間の相互作用はないものとする。また, 適当な量子化軸に関してスピンの上向きを α , スピンが下向きの状態を β と表すことにする。

(6) いま, 井戸の最低エネルギー準位に, スピンが上向きの粒子とスピンが下向きの粒子を詰めた基底状態の固有関数は

$$\psi = \phi_1(x_1) \alpha(1) \phi_1(x_2) \beta(2)$$

と書けるように思われるが, これでは, 2 つのフェルミ粒子は互いに区別できないという事実が取り入れられていない。フェルミ粒子は, フェルミ・ディラック統計に従うから, この 2 粒子系の固有関数は, 2 つの粒子の入れ替え (粒子の座標 x_1, x_2 とスピン座標の同時交換) に対して, 反対称でなければならない。このことに注意して, 基底状態の正しい固有関数を書き下せ。また, この状態の全スピン S の大きさを求めよ。

(7) 設問 (6) で議論した固有関数の反対称性を用いて, 同じエネルギー準位に, スピンが上向きのフェルミ粒子を 2 個 (またはスピンが下向きのフェルミ粒子を 2 個) 詰めることはできないことを示せ。

最後に, 同一の質量 m を持つ, スピンが $1/2$ の互いに区別できない 3 個のフェルミ粒子を, 同じ井戸の中に閉じこめる。ここでも, 粒子間の相互作用はないものとする。

(8) この系の, 基底状態, 第 1 励起状態, 第 2 励起状態のエネルギー, E_{gs}, E_{1st}, E_{2nd} を, それぞれ求めよ。

(9) スピン自由度に伴う縮重に注意して, 基底状態の固有関数を求めよ。答えは行列式の形で表してもよい。