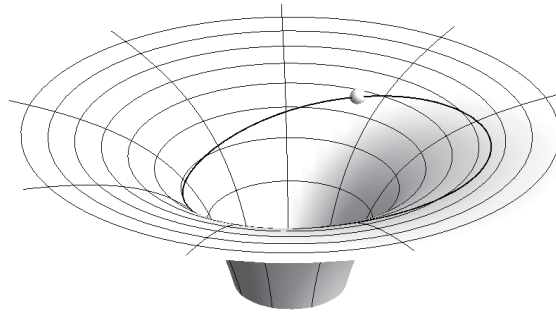


問題 1

博物館に行くと、下図に示すような、中心に穴があいていて上面がラッパの形をした丸いテーブルの展示物を見かけることがある。小さな金属球をテーブル表面に沿って転がすと、テーブル中央の穴の周りを転がる様子を観察できる。



この展示物に対するよくある説明は「重力による惑星運動を模擬しています。」である。重力による惑星運動は、ケプラーの法則として知られる以下の3つの特徴を持つ。

第1法則 惑星の軌道は太陽を1つの焦点とする楕円である。

第2法則 太陽と惑星とを結ぶ動径の掃く面積速度は常に一定である。

第3法則 惑星の公転周期の2乗は太陽からの長半径の3乗に比例する。

はたして、この展示物はこれら3法則を満たしているであろうか。以下で考察してみよう。

なお、以下の設問全てにおいて金属球は大きさの無い質点とみなす。摩擦は無い。テーブル上の金属球の位置はテーブル中央を原点とする円柱座標 (z, r, ϕ) で表示する。すなわち、 r はテーブル中央軸から水平に測った質点までの距離である。テーブル上面の形状は、 z を r の関数 $z = f(r)$ で表す事により表現できる。このとき、水平面に射影した質点の2次元空間 (r, ϕ) における運動について考える。重力加速度は g とせよ。

I. まず、第2法則について考える。力学系における保存量を考察するときには、ラグランジアンを用いると簡単である。ここでラグランジアン L は $L = T - U$ で表される量である。ただし T は系の運動エネルギー、 U は系のポテンシャルエネルギーである。

(1) この系のラグランジアンを求めよ。ただし、 z 、 \dot{z} 、 \ddot{z} を用いてはならない。

(2) 水平面に射影した質点の運動について、面積速度 $\left(\frac{r^2 \dot{\phi}}{2}\right)$ が保存するので第2法則はみたすことを、ラグランジアンをもちいて示せ。

さて、以下の **II**、**III** では、テーブル上面の形状を $f(r) = -\frac{a}{r}$ で表される形に整形した場合についてのみ考える。

II. 第3法則について考える。いま簡単のため、金属球は r 一定 ($r = r_0$) の軌道上にあるとする。

(3) 金属球がテーブル上を1周するために要する時間 T_ϕ を求めよ。

III. 最後に第1法則について考察しよう。以下の議論では、動径方向には $r = r_0$ の周りで微小振動している場合を考える。金属球は **II** と同じ面積速度を保つとする。このとき、軌道が楕円であるとは、その前提条件として「軌道が閉じる」ということを意味するだろう。すなわち、動径方向の微小振動の周期を T_r としたときに、 $T_r = T_\phi$ となる必要がある。

(4) 動径方向の運動方程式を示せ。

(5) $r(t) = r_0(1 + x(t))$ と表したとき、 $x(t)$ に関する単振動の方程式を導出せよ。ただし $|x(t)| \ll 1$ とする。また、この単振動の角速度の $|x(t)|$ 依存性は2次以上のオーダーとなることが分かっている。

(6) T_r を求め、 $T_\phi \neq T_r$ であること、すなわち軌道が楕円ではないことを示せ。

問題2

図1のように1個の電子(電荷 $-e$ 、ただし e は素電荷)が一様な電場 \vec{E}_0 (電場の大きさ E_0)の中で運動している。電子の周りは適当なガスが満たされており、電子はガス原子・分子と頻りに衝突を繰り返すことで、一定の速度 \vec{u} (速さ u 、 u は真空中の光速 c に比べ十分小さい)でゆっくりと電場に平行に移動する。ガスが満たされた空間の誘電率を ϵ 、透磁率を μ とする。

この場合の、電子の移動に伴う電磁エネルギーの変化について考えてみる。なお、電子が一定速度で運動している場合の電場は、電子が静止している場合の電場とは多少異なる。しかし、電子の速さ u が光速 c に比べ十分小さいため、以下のIからIIIでは電子が静止している場合の電場で代用してよいものとして計算せよ。

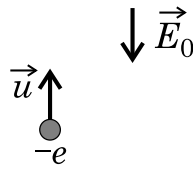


図1

- I. 以下の議論で使用する電束 Ψ について、まず簡単な計算を行う。ここでは、1個の電子に起因する電束密度ベクトル $\vec{D}_e = \epsilon \vec{E}_e$ (\vec{E}_e は電子が作る電場ベクトル)を面積分した電束 Ψ を、図2に示す2つの場合について求める。

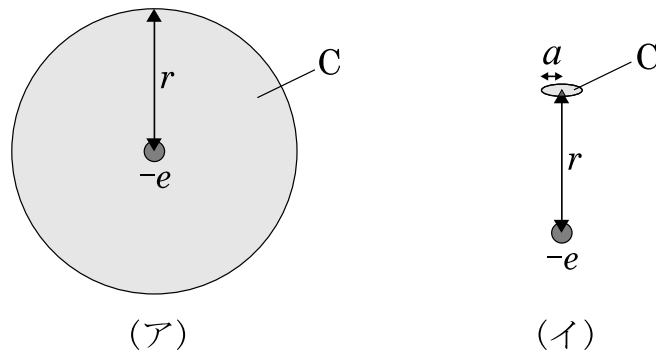


図2

- (1) 図2(ア)のように電子を中心とする半径 r の球面 C 上で面積分を実行し、面 C を貫く電束 Ψ を計算せよ。電束 Ψ の符号は、電束密度ベクトル \vec{D}_e が内から外に面 C を貫く場合を正とする。

- (2) 図2(イ)のように電子から十分離れた r の距離にある半径 a の円板 C 上で面積分を実行し、面 C を貫く電束 Ψ を $a \ll r$ の近似を用いて計算せよ。なお電子と円板 C の中心を結ぶ線分は円板 C に垂直とする。電束 Ψ の符号のとりかたは、電束密度ベクトル \vec{D}_e が図中で下から上に面 C を貫く場合を正とする。

- II. 次に、図3のように、電子を中心に速度 \vec{u} に平行で、半径 b の円筒形の空間を考える。 z 軸が速度 \vec{u} の方向になるように座標軸をとり、電子の位置を $\vec{R} = (x, y, z)$ とする。電子が作る電場 \vec{E}_e に加え、電子の進行方向と逆向きに、 z 軸に平行な一様電場 \vec{E}_0 (電場の大きさ E_0) がある。

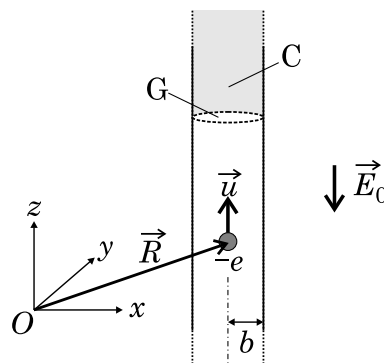


図 3

- (3) 図3のように円筒の円形の断面 G を考える。更に、G の円周を端とし、図中で G より上にある円筒表面を C とする。電子に起因し、面 C を貫く電束を Ψ とする。電子の移動に従って G の円周の接線方向に磁場が生じる。この磁場の大きさ $H = \frac{B}{\mu}$ が下のように表わされることを Maxwell 方程式を用いて説明せよ。

$$H = \frac{u}{2\pi b} \left| \frac{d\Psi}{dz} \right|$$

- III. 更に、単位面積を単位時間当たり通過する電磁エネルギーを表わす量であるポインティング・ベクトル $\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$ を用いた計算を行い、図3の円筒表面全体を通して出入りする電磁エネルギーを見積もる。

- (4) まず、G の位置での円筒側面上におけるポインティング・ベクトル \vec{S} の、側面に垂直な成分 S_{\perp} を計算せよ。円筒から出る向きを正とする。
 なお必要であれば、電子が G の円周の位置に作る電場 \vec{E}_e の円筒に垂直な成分 E_{\perp} (\vec{E}_e が円筒の外に向いている場合正となるよう定義)、 z 軸方向の成分 E_z および G の円周に沿って生じた磁場の大きさ H ($H > 0$) を用いてよい。

- (5) 短い時間 Δt の間に円筒側面全体を通過して円筒内に流入する電磁エネルギー ΔU を計算し、 $e, \epsilon, \mu, u, b, E_0$ および Δt の中から必要なものを用いて表わせ。
- (6) 小問 (5) の結果から、時間 Δt の間に円筒内に流入する電磁エネルギー ΔU は、円筒の半径 b を小さくしても変わらないことが分かる。このエネルギー ΔU は何に使われるかを簡潔に説明せよ。

IV. これまでの取り扱いでは、一定速度で運動する電子が作る電場を、静止している電子の電場で代用した計算を行った。ここでは、この近似は行わず、一定速度 \vec{u} で運動する電子が作る電場と磁場を用いて計算を行ってみる。なお以下では、ガスの密度は十分小さいと考え、誘電率 ϵ と透磁率 μ はそれぞれ真空の誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0 で置き換えて考えることにする。

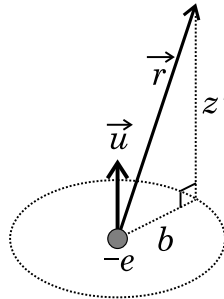


図 4

図 4 のように電子の位置を原点にとり速度ベクトル \vec{u} の方向に z' 軸をとった円筒座標を考えれば、一定の速さ u で運動する電子が作る電場 \vec{E}_e は下のようになることが知られている。

$$\vec{E}_e = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{(b^2 + \gamma^2 z'^2)^{3/2}} \vec{r}$$

また、 \vec{r} および z' の方向に垂直な磁場が発生し（磁場の方向は小問 (3) と同じ）、その磁場の大きさ H は下のようになる。

$$H = \frac{e}{4\pi} \frac{\gamma u b}{(b^2 + \gamma^2 z'^2)^{3/2}}$$

ここで、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ であり、 c を真空中の光速度とすると $\beta = \frac{u}{c}$ である。

- (7) 上の電場と磁場を用いて小問 (5) と同様に ΔU を計算し同じ結果が得られることを示せ。なお解答では下の定積分の公式を用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha^2 x^2)^{3/2}} dx = \frac{2}{\alpha}$$

問題3

加速器で発生した中性子を減速し冷却すると、壁などの表面で弾性散乱をするようになり、中性子は気体分子のように振るまう。このように冷却された中性子を容器の中に入れておく事を考える。中性子の質量を m 、鉛直上向きを z 軸とする。

- I. 重力が無い場合の z 軸方向の運動を考える。ふたのある容器に中性子を入れると中性子は容器の底とふたで弾性散乱を繰り返す。この状態は、無限に高い障壁の井戸型ポテンシャルの中の運動である。

容器の底を $z = 0$ 、ふたの位置を $z = a$ とし、 z 軸方向の一次元の井戸型ポテンシャル

$$V(z) = \begin{cases} 0 & (0 < z < a) \\ \infty & (z < 0, a < z) \end{cases}$$

を考える。 $0 < z < a$ でエネルギー固有値 E の定常状態の Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(z)}{dz^2} = E\phi(z)$$

と与えられる。

ここで長さの次元を持つ定数 b を用い、 $\theta = \frac{z}{b}$ と変数変換を行うと無次元の方程式

$$\frac{d^2\psi(\theta)}{d\theta^2} + \psi(\theta) = 0 \quad (1)$$

を得る事ができる。

- (1) 定数 b を E, m, \hbar を用いてあらわせ。

微分方程式 (1) の解は 1 次独立な 2 つの解 $\sin \theta, \cos \theta$ の一次結合であらわされる。容器の底 ($z = 0, \theta = 0$) の境界条件 $\psi(0) = 0$ から、微分方程式の解として $\sin \theta$ のみを考えれば良いことがわかる。次にふたの位置 ($z = a, \theta = a/b$) の境界条件から、 b およびエネルギー固有値 E を求める事ができる。

- (2) エネルギー準位 $E_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ を求めよ。ただし、 $E_n < E_{n+1}$ とする。
(3) エネルギー固有値 E_1 をもつ状態 (第 1 励起状態) の波動関数の形を解答用紙にグラフとして記せ。横軸は、 $-a/2 < z < 3a/2$ の範囲に渡って示すこと。縦軸のスケールは任意にとってよい。

II. 極低温に冷却した Ultra Cold Neutron (UCN) を考える。UCN は運動エネルギーが小さいため重力ポテンシャルにより、ふたが無くとも容器の中に入れておく事ができる。

鉛直方向の1次元の運動を考えてみよう。 g を重力加速度とすると、ポテンシャルは

$$V(z) = \begin{cases} mgz & (0 < z) \\ \infty & (z < 0) \end{cases}$$

と与えられる。

$0 < z$ でエネルギー固有値 E の定常状態の Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi(z)}{dz^2} + mgz\phi(z) = E\phi(z)$$

と与えられる。長さの次元を持つ定数 l を用い、 $y = (z - \frac{E}{mg})/l$ と変数変換を行うと無次元の方程式

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} - y\psi(y) = 0 \quad (2)$$

を得る事ができる。

(4) 定数 l を g, m, \hbar を用いてあらわせ。

微分方程式 (2) の解は Airy 関数と呼ばれる 1 次独立な 2 つの解 $Ai(y)$ 、 $Bi(y)$ の 1 次結合であらわされる。図 1 に Airy 関数を示す。

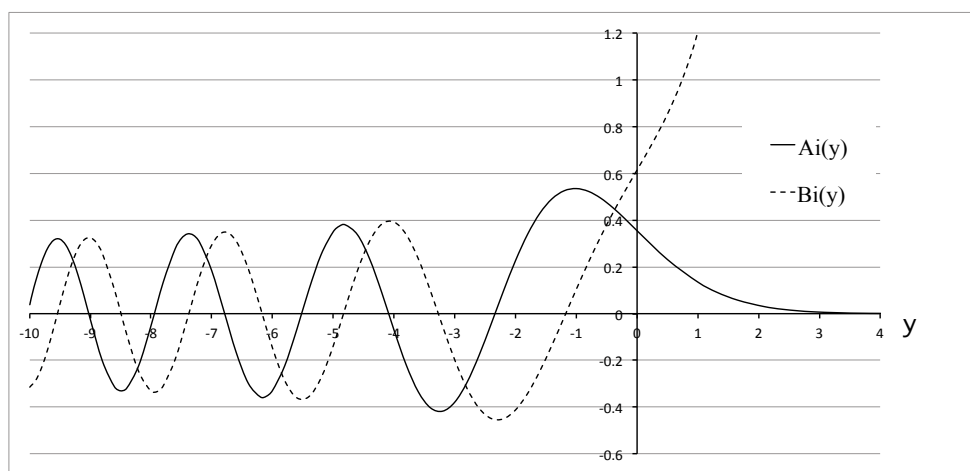


図 1 Airy 関数

$z \rightarrow \infty$ の境界条件を考える。 $z \rightarrow \infty$ で ψ が 0 に収束しなければならないことから 2 つの Airy 関数のうち中性子の波動関数は $\text{Ai}(y)$ のみによってあらわされる。次に底面 $z = 0$ における境界条件を考える。井戸型ポテンシャルと同じように底面で $\psi = 0$ でなければならない。 $\text{Ai}(y)$ は $y = y_n (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ で 0 となるとする。ここで $y_{n+1} < y_n$ が成り立っている。底面 $z = 0$ において $y = y_n$ であるためには E は離散的な値を持つ。

- (5) エネルギー準位 $E_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ を y_n 、定数 l を用いてあらわせ。ただし、 $E_n < E_{n+1}$ とする。
- (6) エネルギー固有値 E_1 をもつ状態（第 1 励起状態）の波動関数の形を解答用紙にグラフとして記せ。横軸は $-\ell < z < 7\ell$ の範囲に渡って示すこと。縦軸のスケールは任意にとってよい。

中性子の場合エネルギー固有値がどのような値となるか実際に計算してみよう。中性子の質量は $m = 940 \text{ MeV}/c^2$ 、重力加速度は $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、 $\hbar c = 0.2 \text{ GeV fm}$ 、光速は $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。1 GeV = 10^9 eV、1 MeV = 10^6 eV、1 fm = 10^{-15} m である。また Airy 関数 $\text{Ai}(y)$ が 0 となるのは $y = \dots -9.023, -7.944, -6.787, -5.521, -4.088, -2.338$ の時である。

- (7) 重力場中の中性子の第 3 励起状態のエネルギー E_3 を有効数字 1 桁で概算せよ。

問題4

気体における分子間力の効果を古典統計力学の範囲で考察しよう。一成分の単原子分子気体を考え、分子を質量 m の質点として扱えば、 N 分子系のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{(i,j)} \phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

と表せる。 $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) は各分子の位置座標と運動量であり、 $\sum_{(i,j)}$ はすべての二分子の組に対して和をとる操作を表す。また、 $\phi(r)$ は距離 r だけ離れた二分子間の相互作用を表すポテンシャルで、 $r \rightarrow +\infty$ では速やかにゼロに近づくと仮定する。

- I. N 個の分子が封入された体積 V の箱が温度 T の恒温槽 (熱浴) と接し、熱平衡状態に達しているとして、正準集団 (カノニカルアンサンブル) の定式化を用いよう。系の状態 (各分子の位置と運動量) を $6N$ 次元の相空間上の点 $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ として表したとき、相空間の積分要素を $d\Gamma = d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_N d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \dots d^3\mathbf{p}_N$ とすれば、正準分配関数は

$$Z(T, V, N) = \int \frac{d\Gamma}{N! h^{3N}} e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)}$$

と定義される。ただし、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ は逆温度、 k_B は Boltzmann 定数、 h は Planck 定数である。

- (1) $N = 1$ の場合にはハミルトニアンの第二項 (相互作用項) は存在しない。この場合の正準分配関数 $z = Z(T, V, N = 1)$ を求めよ。その際、積分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いてよい。ここで、 a は正の定数である。

- (2) $N = 2$ の場合の正準分配関数が

$$Z(T, V, N = 2) = \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{J}{V} \right)$$

と書けることを示せ。ただし、

$$J = \int \left(e^{-\beta\phi(r)} - 1 \right) d^3\mathbf{r}$$

であり、積分範囲は三次元空間全体である。 $\phi(r)$ が $r = |\mathbf{r}| \rightarrow +\infty$ において速やかにゼロに近づくと仮定したので、関数 $e^{-\beta\phi(r)} - 1$ が無視できない値をとるのは r が非常に小さい場合だけである。従って、 $Z(T, V, N = 2)$ を計算する間は、

$$e^{-\beta\phi(r)} - 1 \sim J\delta(\mathbf{r})$$

と近似して構わない。ここで、 $\delta(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r} \neq 0$ ではゼロであるが $\int \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1$ を満たすデルタ関数である。

- II. 気体の熱力学を考えると、示量性と示強性の概念が重要になる。以下では、気体が入った体積 V の箱が、温度 T 、化学ポテンシャル μ の熱浴（これは恒温槽と粒子だめの両方の機能を持つ）に接し、熱平衡状態に達している場合を考えよう。このとき、任意の熱力学変数は (T, V, μ) の関数として表される。熱力学変数 A が示強変数であるとは、任意の $a > 0$ に対して

$$A(T, aV, \mu) = A(T, V, \mu)$$

が成り立つことを意味する。つまり、 A は V 依存性を持たないので、 A は (T, μ) だけの関数となる。一方、 A が示量変数であるとは、任意の $a > 0$ に対して

$$A(T, aV, \mu) = aA(T, V, \mu)$$

が成立することを意味する。

(3) 全微分が

$$d\Omega = -SdT - pdV - \bar{N}d\mu$$

で表される熱力学ポテンシャル（グランドポテンシャル） $\Omega(T, V, \mu)$ を考えよう。ここで、 S は気体のエントロピー、 p は気体の圧力、 \bar{N} は気体分子の数の平均値を表す。熱力学ポテンシャルが示量変数であることに注意して、Euler の関係式

$$\Omega = -pV$$

および、Gibbs-Duhem の関係式

$$-SdT + Vdp - \bar{N}d\mu = 0$$

を導け。

- III. II. で議論した、 (T, V, μ) が与えられた環境の下で考える場合、大正準分配関数

$$\Xi(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{+\infty} Z(T, V, N)\lambda^N$$

を導入すると便利である。ただし、 $Z(T, V, N=0) = 1$ と定め、フーガシティ $\lambda = e^{\beta\mu}$ を導入した。大正準分配関数と、熱力学ポテンシャルの間には、

$$\Omega(T, V, \mu) = -k_B T \ln \Xi(T, V, \mu)$$

の関係が成り立つ。

- (4) 分子間相互作用が存在しない ($\phi(r) = 0$) 場合の熱力学ポテンシャル Ω および分子数の平均値 \bar{N} を、 z, λ および $k_B T$ を用いて書き表せ。

- (5) 気体が低密度かつ高温の場合（すなわち $\lambda \ll 1$ の場合）に着目して、分子間相互作用の効果を考察しよう。 λ の二次まで残す近似で、気体の圧力 p と分子数密度 $n = \bar{N}/V$ を

$$\begin{aligned} p(T, \mu) &= a_1(T)\lambda + a_2(T)\lambda^2 \\ n(T, \mu) &= b_1(T)\lambda + b_2(T)\lambda^2 \end{aligned}$$

と評価する（ p と n は示強変数であるので、 T と μ だけの関数になる）。この展開係数 $a_1(T)$, $a_2(T)$, $b_1(T)$, $b_2(T)$ を z , V , J , $k_B T$ を用いて書き表せ。

- (6) 前問の結果から λ を消去することにより、気体の状態方程式を n の二次まで残す近似で、

$$p(T, n) = nk_B T (1 + nB(T))$$

と書くことができる。係数 $B(T)$ を求めよ。

- (7) 分子間相互作用を表すモデルポテンシャルとして、

$$\phi(r) = \begin{cases} +\infty & (r < d) \\ -u_0 \left(\frac{r}{d}\right)^{-6} & (r \geq d) \end{cases}$$

を考えよう（図1）。ここで、 d と u_0 はそれぞれ長さエネルギーの次元を持つ正の定数である。低密度・高温の場合を考えているから、 $n \ll d^{-3}$, $k_B T \gg u_0$ であるとしよう。このとき、

$$e^{-\beta\phi(r)} - 1 \sim \begin{cases} -1 & (r < d) \\ -\beta\phi(r) & (r \geq d) \end{cases}$$

と近似できる。上記の近似式を用いて、積分 J を d , u_0 , $k_B T$ を用いて書き表せ。さらに、分子間相互作用の効果によって圧力 $p(T, n)$ が増大するか、減少するかを判定せよ。

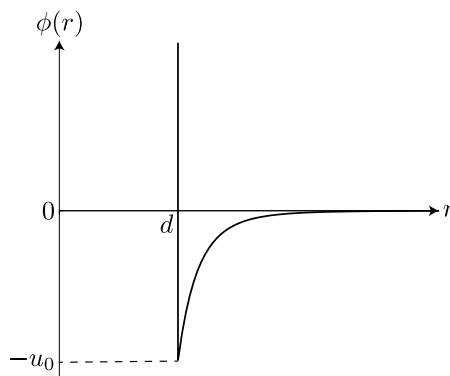


図 1