

大学院前期 (修士) 課程 (物理学専攻、宇宙地球科学専攻) 入試問題
物理学 B
 (平成9年9月)

B1 から B8 までの 8 問の中から 4 問を選択し解答せよ。解答用紙の問題番号の欄に問題番号を書くこと。

B1

(1) 2 粒子の 1 次元運動を量子力学的に調べよう。それぞれの粒子は、質量 m_1 、 m_2 の質点とし、その間にポテンシャル $V(x)$ で表される引力が働いているとする。ただし、 x は 2 粒子間の距離とする。以下の設問に答えよ。

(1-1) この 2 粒子系の運動を記述する Schrödinger 方程式は相対運動と重心運動に分離できる。粒子 1, 2 の座標 x_1, x_2 を用いて、相対座標 x 、重心座標 X を表せ。また、重心の質量 M 、換算質量 m を定義し、相対運動と重心運動を記述する方程式を記せ。

(1-2) ポテンシャルが $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, ($k > 0$) であるとき、相対運動の基底状態および第 1 励起状態の波動関数、エネルギーを求めよ。ただし、波動関数の規格化をする必要はない。

(1-3) また、 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + ax$ の場合には、(2) の場合に比べてエネルギーはどれだけ変化するか。

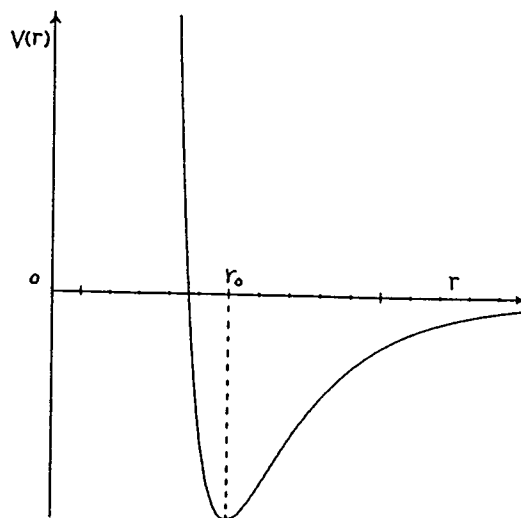
(2) 次に、3 次元空間で 2 原子分子を取り扱うことにする。2 個の原子の間には相対距離 r のみによるポテンシャル $V(r)$ で表される力が働くとする。

(2-1) 恒等式

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) - \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}, \quad (\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r})$$

を利用して、相対運動の動径方向の波動関数 $u(r)$ が満たす方程式を導け。ただし相対運動の軌道角運動量の大きさは $l\hbar$ とせよ。

(2-2) 2 原子間に働くポテンシャルが図のように、 $r = r_0$ で最小値を取るものとする。古典力学においては、最もエネルギーの低い状態は 2 粒子間の距離が $r = r_0$ の場合である。量子力学においてもこれに近い状況であるとして、相対運動の軌道角運動量が $l = 0$ の場合、基底状態と第 1 励起状態のエネルギー差を近似的に求めよ。換算質量は m とする。



B2

図のような底面積 S の容器に理想気体 (粒子数 N) が閉じ込められている。容器の一端にはピストンがあり、ピストンはバネで外側から押さえられている。バネ部分は真空である。容器全体は温度 T の熱浴に接している。容器の中が真空のときには、ピストンは気体の圧力を受けないので、バネは自然長である。そのとき、容器の空間の体積は SL であるとし、ピストンの位置の自然長からのずれを X とする (つまり、自然長のときのピストンの位置を $X = 0$ とする)。全系のハミルトニアンとしては

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} a X^2$$

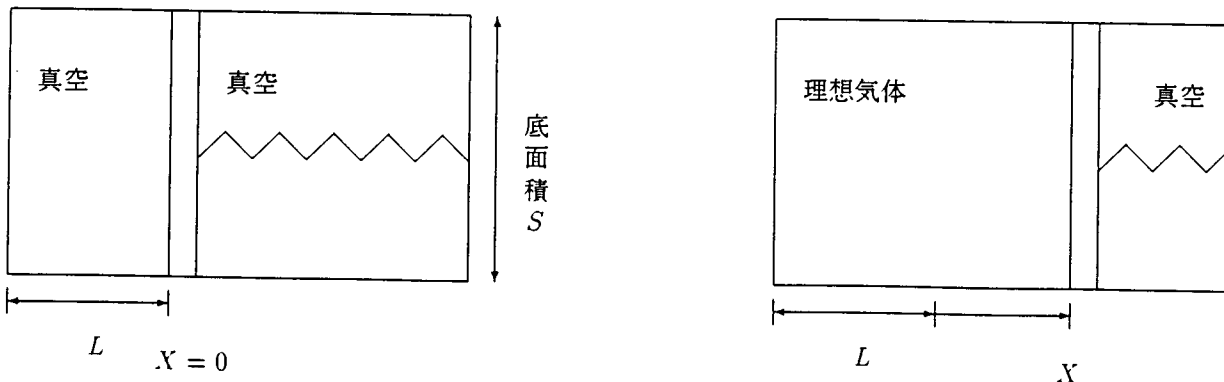
を考える (m は気体分子の質量、 p_i は気体分子の運動量、 a はバネ定数)。

容器に気体を入れると、気体の圧力によりピストンの安定位置が変わる。この位置を統計力学によって求めたい。バネは十分に長いので、完全に押し縮められるような状況は考えなくてよいとする。

1. (a) 気体は古典理想気体であるとする。ピストンが $X > 0$ の位置に固定されているものと仮定して、バネの持つエネルギーまで含めた全体 (気体とバネで構成される系全体) のヘルムホルツ自由エネルギー $F(T, X)$ を求めよ。
 - (b) 前問では X の値が与えられたときの自由エネルギーを考えしたが、実際にはピストンの位置 X は熱平衡の条件から決まるはずのものである。前問で求めた自由エネルギー $F(T, X)$ が熱平衡状態では最小になる、という平衡条件を用いて、熱平衡での X の値 X_e を温度の関数として求めよ。さらに、 X_e の高温・低温での温度依存性を調べ、概略を図示せよ。
 - (c) この系の熱容量の高温・低温での温度依存性を調べよ。
 - (d) ここまではピストンの位置 X は固定されているものとして計算した (つまり、 X が変化することは分配関数中で考慮されていない)。今度は X が可変な系での分配関数を計算しよう。 X が固定されているとして得られた分配関数 $Z(T, X)$ を、 X の取り得るすべての値について積分すれば、 X の変化も考慮した分配関数 $Z(T)$ が得られる。これを計算するにあたって、 X に関する積分を鞍点法 (指数の肩が最大となる点のまわりで展開する方法) で近似することにしよう。この手続きを実行すると、その結果として第2問で得た X の熱平衡値 X_e が再現されることを示せ。
2. 気体が理想フェルミ気体である場合について同じ問題を考える。絶対0度での X_e が粒子数 N にどのように依存するかを、 $X_e \gg L$ および $X_e \ll L$ の場合について求めよ。

なお、必要なら以下の公式を使ってよい。

$$\log N! \simeq N \log N - N, \quad \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$



B3

物質が星に降り積もることにより、物質が持ち込んだ重力エネルギーを星の表面で熱に変換して、X線を放射している星がある。そのような星には明るさの上限が存在する。設問に従って考察してみよう。簡単のために次の事を仮定する。(a) 星は、球対称にX線を放射しており、その放射エネルギーは毎秒あたり L である。(b) 落ちてくる物質はその電子とX線とが衝突することにより力を受ける。この衝突1回で物質がX線からもらう運動量は、平均的にX線が衝突前に持っていた運動量と同じとする。(c) 星からの放射は、すべて、光子1個のエネルギーが ε のX線であるとする。(d) 原子は、たとえ電離しても、必ず、原子核(またはイオン)と電子がともに行動すると考える。(e) 物質が降り積もることによる、星の質量の変化は無視できるとする。(f) 星の質量を M 、光の速度を c 、重力定数を G とする。
次の設問を順に考えてみよう。

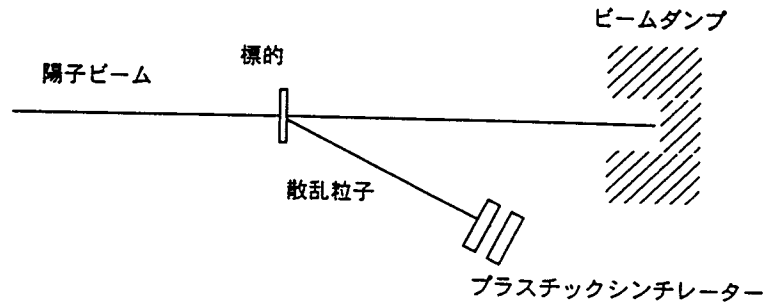
- (1) 落ちてくる物質は水素であると考えよう。星の中心から距離 d のところにある水素原子が受ける重力はいくらか? 水素原子の質量を m とし、記述せよ。
- (2) エネルギーが ε のX線の光子1個が持つ運動量はどうか書けるか?
- (3) 星の中心から距離 d のところへ放射により運ばれてくる運動量は、単位面積当たり、単位時間当たりいくらか?
- (4) 水素原子が単位時間当たりにX線からもらう運動量は、どう記述できるか? X線が電子と衝突する断面積は σ としよう。
- (5) 結局、水素原子は星からの重力と、放射による力の両方を受ける。その力の合計を書け。ただし、星からの外向きを正とする。
- (6) 降り積もる物質の量が少ない状態から、段々多くなってくると、やがて、放射による力が強くなって、物質は落ちることができなくなる。そのため、毎秒当たりの放射エネルギー、 L 、には上限が存在する。それを、水素原子が重力で引き付けられる力と、放射による力が釣り合う L と考えると、 L の上限はどのように記述されるか?
- (7) ある星を観測すると $L = 7.2 \times 10^{30} \text{ J sec}^{-1}$ であった。これは、(6) で記述した上限値以下であるにちがいないと考えると、星の質量につく制限はどうなるか? ただし、計算を簡単にするため、 $\sigma = 7 \times 10^{-29} \text{ m}^2$, $\pi = 3$, $G = 7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $m = 2 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m sec}^{-1}$, とする。
- (8) 水素原子が、X線と衝突しながら落ちている状態を考えよう。無限遠から星表面に落ちてきた時、水素原子が平均的に持っている運動エネルギーはいくらか? 無限遠では水素原子は止まっていたとする。また星の半径を R とせよ。
- (9) これまでの設問では、水素原子を考えていたが、もしヘリウム原子 (^4He) だったら、 L の上限値は、何倍になるか? また、その理由を簡単に述べよ。

B-4

サイクロトロンから引き出された陽子ビーム（運動エネルギー 80 MeV、ここで $\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$ ）を標的に当て原子核反応を起こさせた。この結果陽子、中性子、 γ 線、電子が放出された。この中から中性子だけを取り出してそのエネルギーを測定したい。これを以下の順序で考えよ。尚、計算は非相対論の範囲で良く、数値計算は有効数字 1 桁で求めよ。ここで光速 $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/sec}$ 中性子と陽子の質量は同じで $1 \text{ GeV} (\text{GeV} = 10^9 \text{ eV})$ とする。

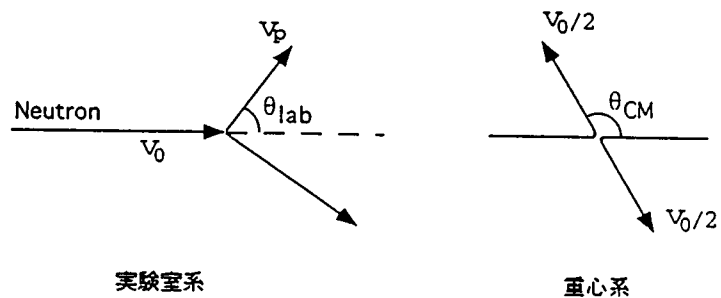
- (1) 標的の位置から 3m 離れた所に検出器を置いた。運動エネルギー 20 MeV の中性子が検出器まで到達する時間を求めよ。
- (2) サイクロトロン陽子ビームは 100 nsec ($1 \text{ nsec} = 10^{-9} \text{ sec}$) ごとに来る。これを利用して中性子の標的から検出器までの飛行時間を測定することが出来る。時間の測定は 1 nsec の分解能で可能であるとすると、運動エネルギー 20 MeV の中性子のエネルギーの測定精度はいくらか。

- (3) 中性子検出器としてプラスチックシンチレーター (CH) を使っている。この検出器は効率や応答は異なるものの、他の粒子（陽子、電子、 γ 線）にも信号を出す。図の様に同じ大きさのプラスチックシンチレーターを 2 枚並べて後ろの検出器が信号を出した時前の検出器には何も来ていないという条件をつけたところ、検出された粒子の可能性として中性子と γ 線が残った。理由を説明せよ。



- (4) 残った γ 線と中性子を分ける方法を提案せよ。

- (5) 中性子検出器は検出器中の陽子に中性子が衝突しその陽子の反跳エネルギー (E_p) を測定している。図に重心系と実験室系の散乱が描かれている。これより実験室系において散乱された陽子のエネルギーと重心系の散乱角の関係を求め、重心系で等方的な角度分布 ($\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{\sigma}{4\pi}$) を持つとき陽子のエネルギー分布 ($\frac{d\sigma}{dE_p}$) が一様になることを示せ。



- (6) 中性子の飛行時間の測定には 100 nsec の整数倍の不定性が残る。プラスチックシンチレーターの反跳陽子のエネルギーの threshold（それ以下では検出出来ない値）をいくらにすれば 100 nsec 余分に掛かって到着した中性子を排除出来るか。

結晶格子による波動の回折現象について次の問に答えよ。

[問1] 光子 (x線)、電子、中性子が自由運動をしている。各々が1 Å (10⁻¹⁰ m) の波長を持つときの、各々のエネルギーをeVの単位で求めよ(有効数字1桁まで)。[プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J·s, 電子質量 $m_e = 9.91 \times 10^{-31}$ kg, 中性子質量 $m_N = 1.68 \times 10^{-27}$ kg, 1eV = 1.6 × 10⁻¹⁹ Jとせよ]

[問2] 結晶に入射する粒子、及び結晶によって散乱された粒子の波動関数を平面波とし、各々の波数ベクトルを k 及び k' ($k = k'$) とすると、散乱波の強度は、次の F の2乗に比例する。

$$F(k - k') = \int_V e^{i(k - k') \cdot r} n(r) dr \quad V: \text{結晶体積}$$

$n(r)$ は、散乱体 (x線、電子に対しては電荷、中性子に対しては原子核及び磁気モーメント) の密度分布関数である。いま、結晶の単位胞の中の密度分布を表す関数 $S(r - R)$ を用いて

$$n(r) = \sum_R S(r - R)$$

と書けるとすると、 F は、因子 $\delta(k - k' - G)$ と残りの因子の積に書けることを示せ。[δ はデルタ関数、 R と G は、それぞれ結晶の格子 (ブラベ格子とする) 及び逆格子ベクトルであり、逆格子ベクトルの大きさは、通常の定義の 2π 倍されている。]

[問3] 図1aは、回折実験の光学的配置を示す模式図 (平面図) である。 a_1^* 、 a_2^* は適当な逆格子の主軸でこれらと k 及び k' は同一水平面内にあるとする。

因子 $\delta(k - k' - G)$ によって決まる回折条件を図1bの中に、 k 、 k' 、 2θ 、 ω を使って示せ (これらの量の大きさを、図1aに示されたそれらと対応づける必要はない)。なお、図1bで逆格子点は白丸で表されている。

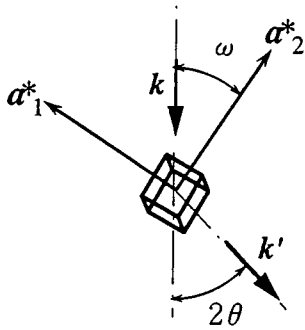


図 1 a

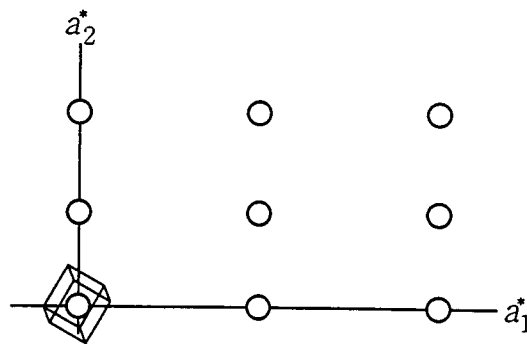


図 1 b

[問4] 因子 $\delta(k - k' - G)$ は、ブラッグの回折条件

$$2d \sin \theta = n \lambda$$

を与える (d : 結晶面間隔、 2θ : 散乱角、 λ : 波長、 n : 整数)。このこと証明せよ。

[問5] 次に、結晶中に

$$n(r) = \{1 + A \cos(Q \cdot r)\} \sum_R S(r - R), \quad |A| \ll 1$$

で表される状態が実現したとする。これは、元の状態に波数ベクトル Q の小さな変調が重なっている状態で、この変調は、電荷密度波或いはスピン密度波に対応する。この時、回折は、元の G の位置の他に、 $G \pm Q$ の位置に衛星反射の形で起こる (図2の黒丸)。 $\cos(Q \cdot r)$ を指数関数の合成で書くことによって、この事を、 F の式で導け。

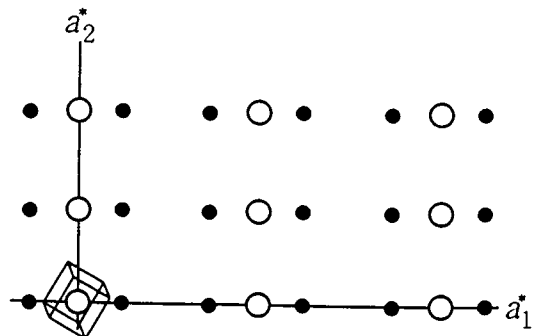


図 2

B-6

- (1) 結晶中の電子の波動関数は結晶全体にひろがった形をしている。しかしこのような状態は一種の数学的理想化であって、現実の結晶中の電子の波のひろがりにはそんなに大きいわけではない。ふつうの結晶の大きさに比べれば、電子の波のひろがりほとんど無視することができ、質点とみなしてよい。現実の電子は波の塊り、いわゆる波束になっているものと考えることができる。そこで波束の性質について次の問に答えよ。

- (1-1) 振幅が a および $a/2$ で、 x 方向に進む 3 個の電子波、

$$\begin{aligned}\phi_0 &= a \sin(\omega_0 t - k_0 x) \\ \phi_1 &= \frac{a}{2} \sin(\omega_1 t - k_1 x) \\ \phi_2 &= \frac{a}{2} \sin(\omega_2 t - k_2 x)\end{aligned}$$

の重ね合わせで波束 ϕ を作ろう。ただし、 $k_1 = k_0 + \delta k$, $k_2 = k_0 - \delta k$, $k_0 \gg \delta k$ で、 ω と k の分散関係は $\omega = \omega(k)$ で与えられ、 $\omega_i = \omega(k_i)$ とする。共通の分散式、 $\omega(k)$ および $k_0 \gg \delta k$ を考慮して、 ϕ の関数形を波束の状態、即ち波の塊りがわかるような形に変形して示し、波束の概略を図示せよ。

- (1-2) 上の波の塊りの動きが電子の運動に相当する。つまり波束の進む速度が電子の速度ということになる。(1-1) より波束の速度 v_g を求め、 ϕ_0 の進む速度 v_p との違いを示せ。

- (2) 次に、金属の光学的性質を考えよう。金属中には多くの伝導電子があるが、これらは特定の場所に束縛されているわけではない。したがって、電場などが加えられた場合、伝導電子は加速され金属中を自由に運動する。そして不純物やフォノンと衝突してエネルギーや運動量を失う。しかし、ここでは衝突の効果は無視できるとし、伝導電子の質量を m 、電荷を q として次の問に答えよ。

- (2-1) x 方向に振動する交流電場、 $E(t) = E_0 \cos \omega t$ が加えられた場合の伝導電子の運動方程式を書き、それを解いて任意の時刻 t における伝導電子の位置 $x(t)$ を求めよ。ただし、電子は粒子と見做すことができ、古典論で取り扱えるものとする。また、 $x(0) = x_0$, $(dx/dt)_{t=0} = v_0$ とする。

- (2-2) (2-1) の解のうち、振動電場の影響を直接受ける項によって伝導電子は振動する。この振動運動によって電場と逆向きの双極子モーメント p_e が生じるが、その大きさはいくらか。

- (2-3) 伝導電子が単位体積当り n 個あるとき、伝導電子の分極を考慮した金属の誘率 $\epsilon(\omega)$ はどのような式で与えられるか。また、 ϵ と ω の関係をグラフに図示せよ。

- (2-4) ϵ と ω の関係から、金属に入射する電磁波の振動数 ω を変化させたとき、電磁波に関してどのようなことが予想されるか。物質の境界や物質中の電磁波の様子を考慮して簡単に説明せよ。

- (3) 物理の研究において、試料を熱処理したり、様々な条件の下で実験を行うのに真空度や温度を知る必要がある。そこで真空度や温度を測定する検知器について、それぞれ 3 種類挙げ、それぞれの検知の原理となるキーワード（例えば抵抗値の変化など）を付して答えよ。

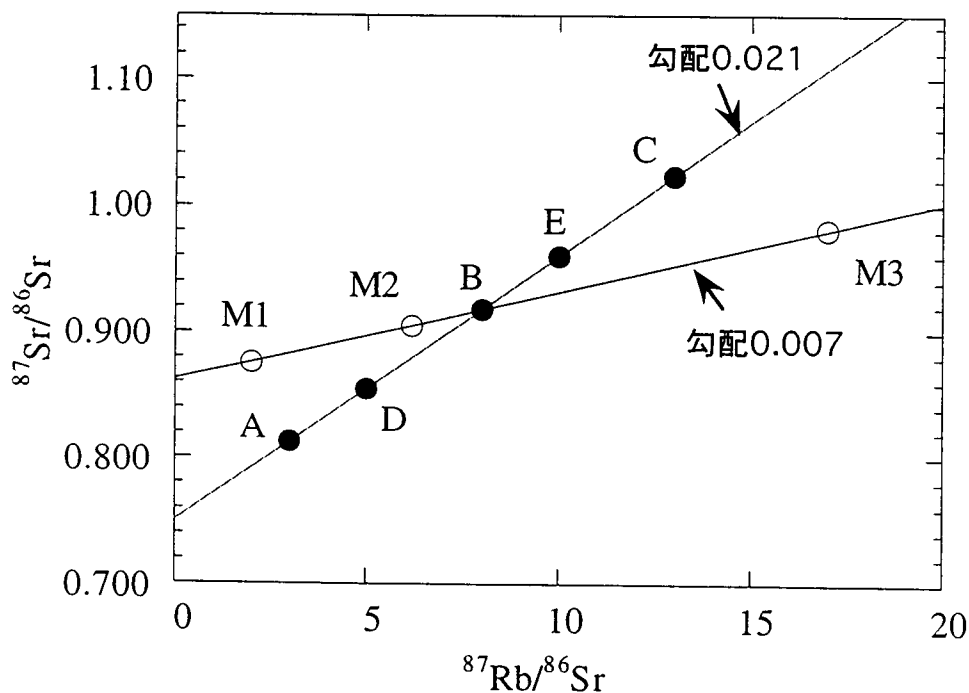
B7 地球科学で用いられる年代測定法についての以下の質問に答えよ。

(1) ある地域の異なる場所で採取した岩石A, B, C, D, Eおよび1つの岩石Bから分離した鉱物M1, M2, M3のRb, Sr同位体データについて、 $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ vs. $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 図上にプロットしたところ、下図のように全岩のデータおよび鉱物のデータがそれぞれ直線上に並んだ。以下の質問に答えよ。なお、 ^{87}Rb は壊変（崩壊）定数 $1.4 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ で ^{87}Sr に壊変する。

(1-1) 全岩のデータおよび鉱物のデータがそれぞれ直線上に並ぶ（アイソクロン）のはなぜか、簡単に説明せよ。また、アイソクロンが成立するための条件は何か。

(1-2) この地域の岩石の形成年代および熱史についてどのようなことがわかるか。

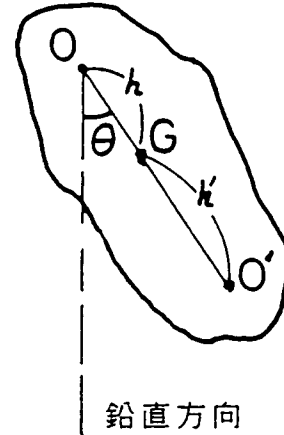
(1-3) 特殊な例として、この系内では放射壊変による反応があると同時に、変質作用などによりRb, Srともに、その系から一方的に流出する場合を考える。その変化の割合（流出速度）は、各同位体の量に比例するとする。Rbに対する比例係数を k_1 、放射性起源のSrに対する比例係数を k_2 、初生のSrに対する比例係数を k_3 として方程式を記述し、この系でも見かけのアイソクロンが成立することを示せ。また、どのような場合にこの見かけの年代が真の年代と一致するか。



(2) Rb-Sr法がもう1つの代表的な年代測定法であるK-Ar法と手法的に異なる点はどこにあるか。

B-8

右図のように2つの支点 O , O' を持つ剛体振り子 (Kater の可逆振り子) を用いて重力加速度 g の測定を行なった。ただし剛体の重心 G は、2つの支点を結ぶ直線上にあり、 G の位置はオモリの調整で変化させることができる。 OG , $O'G$ の距離を、それぞれ h , h' とする ($h+h'=L$:一定)。必要であれば枠内の数値を用いても構わない。



万有引力定数	$G = 6.7 \times 10^{-11}$	$[\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$
地球の平均半径	$r = 6.4 \times 10^6$	$[\text{m}]$
地球質量	$M_e = 6.00 \times 10^{24}$	$[\text{kg}]$
地球の自転角速度	$\omega = 7.3 \times 10^{-5}$	$[\text{rad}/\text{sec}]$

(1) 次の各問に答えよ。

(1-1) 支点 O のまわりの慣性モーメントを I , 振り子の質量を M としたとき、ある条件のもとで振り運動の周期 T は、下式で表される事を示せ。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad (1)$$

(1-2) 重心のまわりの慣性モーメントを I_G とすると、(1) 式の I は平行軸の定理を用いて $I = I_G + Mh^2$ と表せる。直線 OG 上には、 O 以外に同じ振動周期 T を持つ支点 O'' が存在するが、この時、下の条件が満たされることを示せ。ただし $GO'' = h''$ とする。

$$h + h'' = \frac{gT^2}{4\pi^2} \quad (2)$$

(1-3) Kater 振り子による g の測定では、 G の位置を変化させて、(1-2) の O'' を O' に一致させる。 g を求めるのに式 (2) の条件の T を使う利点は何か? また実際の測定で注意すべき点は何か?

(2) 重力の地域測定は、17世紀に振り子時計を用いて、世界各地で時間を計測した結果、その値が緯度とともに変動したことに始まる。 g の地域変動の要因をいくつかあげ、そこから地球に関して得られる情報について述べよ。

(3) 下の表は近年の惑星探査で得られた、いくつかの惑星の g および平均半径の値を示す。以下の各問に答えよ。ただし、(3-1)(3-2) では表を作成し、その中に答えを記入せよ。

(3-1) (a)-(e) の惑星の平均密度を計算せよ。その際、(例) の g および平均半径の値を用いてもかまわない。

(3-2) (a)-(e) の惑星について推定される主要な内部組成を記入し、対応する惑星の名称を { } の中から選択せよ。{ 水星、金星、土星、海王星、冥王星 }

(3-3) 惑星が異なる内部組成を持つに至った原因について論ぜよ。

	g $[\text{m}/\text{sec}^2]$	平均半径 r $[\text{km}]$	平均密度 ρ $[\text{g}/\text{cm}^3]$	惑星の名称	内部組成
(例)	9.8	6400	5.5	地球	岩石、金属
(a)	0.68	1100			
(b)	3.7	2400			
(c)	8.7	6100			
(d)	11.0	25000			
(e)	10.0	60000			