

物理学 B

(平成 13 年 8 月)

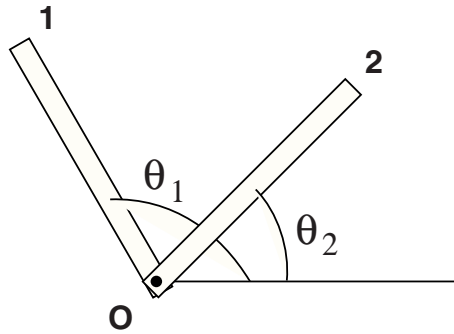
B1 から B6 までの 6 問の中から 3 問を選択し解答せよ。ただし理論の志望者は B1, B2, B3 から 2 問以上選択することが必要である。解答用紙の問題番号の欄に選択した問題の番号を書くこと。

B1 (量子力学)

二本の棒が点 O のまわりに平面内で回転する系を量子力学的に考察する。二本の棒の一端は O に固定されており、棒の O のまわりの慣性モーメントを I 、回転角を θ_1, θ_2 とするとき、系のエネルギーは

$$H = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - k \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

で与えられる。ここで $\dot{\theta}_1 = d\theta_1/dt$ である。また、 $k > 0$ であり、二本の棒はお互いに引き合う。 θ_1, θ_2 に対して共役な運動量は $p_1 = I\dot{\theta}_1, p_2 = I\dot{\theta}_2$ である。



- (1) 量子力学では、 $[\theta_1, p_1] = [\theta_2, p_2] = i\hbar$ である。この系の波動関数 $\psi(\theta_1, \theta_2)$ に対する Schrödinger 方程式を書き下せ。
- (2) $\psi(\theta_1, \theta_2)$ は θ_1, θ_2 の周期関数、つまり、 $\psi(\theta_1 + 2\pi, \theta_2) = \psi(\theta_1, \theta_2 + 2\pi) = \psi(\theta_1, \theta_2)$ である。 $k = 0$ のときのエネルギー準位を求めよ。基底状態、第 1 励起状態、第 2 励起状態の縮退度 (多重度) も求めよ。

以下では、 $k \gg \hbar^2/I$ のときと、 $k \ll \hbar^2/I$ のときを別々に考える。

- (3) $k \gg \hbar^2/I$ のとき、ポテンシャルエネルギーは運動エネルギーに比べて支配的になり、基底状態の波動関数は、ポテンシャルエネルギーを最小にする所に鋭いピークをもつ。このことを考慮して、基底状態のエネルギーを近似的に求めよ。
- (4) $k \ll \hbar^2/I$ のとき、ポテンシャルエネルギーは運動エネルギーに比べて小さい。
 - (4-1) 基底状態のエネルギーを、 k について 1 次の摂動で求めよ。
 - (4-2) $k = 0$ のとき第 1 励起状態は縮退している。この縮退が k について 1 次の摂動でとけるかどうかを考察する。エネルギー固有値、および固有波動関数を求めよ ($k = 0$ のときの第 1 励起状態に対してのみでよい)。

B2 (統計力学)

温度 T の熱平衡状態にある 3 次元理想フェルミ気体がある。化学ポテンシャル μ 、体積 V 、粒子質量 m 、ボルツマン定数 k 、プランク定数 $h (= 2\pi\hbar)$ として、以下の設問に答えよ。ただし、結果だけでなく計算の過程も記せ。スピン自由度などの内部自由度は考えない。また、全粒子数を N とする。

- (1) この系の 1 粒子量子状態 j のエネルギーを ϵ_j とする。 T と μ とが与えられているとき、粒子数表示 $\{n_j\}$ を用いて、この系の分配関数 $\Xi(T, \mu)$ を導出せよ。
- (2) 設問 (1) の $\Xi(T, \mu)$ を用いて、1 粒子量子状態 j を占める粒子数 n_j の平均値 $\langle n_j \rangle$ を求めよ。
- (3) フェルミエネルギー ϵ_F を数密度 $\frac{N}{V}$ の関数として求めよ。

以下では、体積 V は十分に大きく、エネルギーが連続変数とみなせる場合を考えて計算してもよい。

- (4) 絶対零度 $T = 0$ での 1 粒子あたりのエネルギー e_0 の平均値 $\langle e_0 \rangle$ と ϵ_F との比 $\frac{\langle e_0 \rangle}{\epsilon_F}$ を求めよ。
- (5) フェルミ縮退が強い場合、定積熱容量 C_v は温度 T に比例する。この物理的理由を説明せよ。
- (6) 古典理想気体の定積熱容量を C_v^{cl} とすると、任意の温度に対して $C_v < C_v^{\text{cl}}$ である。この物理的理由を説明せよ。

B3 (物理数学)

(1) 1 辺が長さ L の立方体に閉じ込められた輻射エネルギーに対するプランクの公式

$$U(\nu)d\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu$$

を考える。 $h \sim 0$ の場合、エネルギー密度が温度に比例する古典電磁気学のレーリー-ジーンズの公式に帰着することを示せ。

(2) 振動数が大きいときは、指数関数を含むウィーンの公式になることを示せ。

(3) プランクの公式を振動数 ν について積分して全輻射エネルギーを求めると、 σ を T によらない係数として

$$E = \sigma T^4 \quad (\text{シュテファン-ボルツマンの法則})$$

となることを示せ。

(4) 以下 σ を求めることを考えよう。

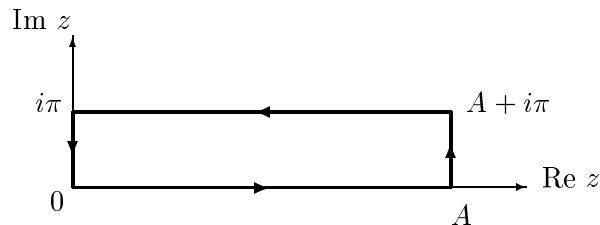
(4-1) まず

$$\int \frac{z^n}{e^z - 1} dz \quad (n \text{ は正の奇数})$$

を図に示した経路で積分し、 $A \rightarrow \infty$ とすることにより

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx + \int_0^\infty F(x) dx + \frac{(i\pi)^{n+1}}{2(n+1)} = 0$$

なる式が成り立つことを示し、この表式の第 2 項の被積分関数 $F(x)$ を求めよ。



(4-2) 次に

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x + 1} dx = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx$$

が成り立つことを示せ。

(4-3) 以上の結果から σ を求めよ。

B4 (原子核実験)

以下の設問に答えよ。計算にあたっては、有効数字1ケタ程度の精度を目標に、必要に応じてテーラー展開等の近似を行うこと。

- (1) タイプの異なる放射線検出器を3種あげよ。
- (2) これらの放射線検出器の内から1つを選び、その検出器の構造と動作原理を簡潔に説明せよ。
- (3) 物質の厚さを変えながら、この物質を透過してくる放射線の個数(カウント数)を測定する。単一エネルギーの α 線、 β 線、 γ 線について、透過してくる放射線のカウント数と厚さの関係を示すグラフの概略をそれぞれ図示せよ。また、相互作用の違いや質量の違いに留意し、そのようなグラフになる理由を簡潔に説明せよ。
- (4) 1.0 MeVの γ 線を鉛ブロックでシールドしたい。透過してくる γ 線の個数を9/10及び1/100に減衰させるために必要な、およその厚さ $x[\text{cm}]$ をそれぞれ見積もれ。また、計算の過程も示せ。ただし、鉛による1.0 MeVの γ 線の吸収係数を $\mu = 0.8 \text{ cm}^{-1}$ とせよ。計算にあたっては、 $(0.9)^7 \sim 0.5$ 、 $2^3 < 10 < 2^4$ 、 $2^6 < 100 < 2^7$ 、 $\log_{10}2 \sim 0.30$ 、 $\log_{10}3 \sim 0.48$ 、自然対数の底は ~ 2.7 などの近似値を適宜用いて工夫してもよい。
- (5) ラザフォードは史上初めて原子核反応を観測した。この時の反応は $^{14}\text{N} + \alpha \rightarrow ^{17}\text{O} + \text{p} - 1.2[\text{MeV}]$ で、静止した薄い ^{14}N (原子番号 $Z = 7$)標的にエネルギーの高い α 線($Z = 2$)を衝突させた。さて、現実はこの吸熱反応を観測するには、上記反応式中の1.2 MeVよりもかなり高い α 線エネルギーが必要になる。この理由として考えられる2つの主要因を簡潔に説明せよ。
- (6) これらの要因を考慮して、上記の反応の観測におよそ何MeVの α 線エネルギーが必要か求めよ。考え方も示せ。ただし、質量数 A の原子核の核半径を $R = 1.4 \times A^{1/3}[\text{fm}]$ とせよ。また必要なら、 $e^2/(4\pi\epsilon_0) = 1.4 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$ (e : 素電荷、 ϵ_0 : 真空の誘電率)の数値を用いて計算してもよい。

B5 (物性実験)

物質の磁性を調べるため 2 種類の方法で磁化率の測定を計画した。第一の方法はコイルを含んだ交流回路のインピーダンスを測定し、コイルの透磁率から磁化率を求める方法である。第二の方法は磁気モーメントの大きさを直接測定し、磁化率を求めるものである。以下この 2 つの方法について考察する。

(1) 交流回路のインピーダンス測定

- (1-1) 長さ l 、断面積 S 、単位長さあたりの巻数 n の十分に長いコイルの自己インダクタンス L_0 を求めよ。ただし真空の透磁率を μ_0 とせよ。
- (1-2) このコイルと抵抗 R 、定電流発振器 $I = I_0 e^{i\omega t}$ を用い図 1 のような交流回路を組んだ。コイル中に試料が無い場合と、コイルに試料を満たした場合のこの回路のインピーダンスの差を考える。試料の複素交流磁化率を $\chi = \chi' - i\chi''$ とすると、試料を入れたことによるこの回路のインダクタンス、抵抗の変化分を χ' 、 χ'' を用いて求めよ。

(2) 振動法による磁化測定

- (2-1) 図 2 のように座標系をとり、 x 軸に平行にかけた磁場 H により誘起された磁気モーメント $m = (m, 0, 0)$ が原点にあるとする。この場合、磁化率は M/H と求まる。ただし M は磁気モーメントの大きさ m より求めた磁化の値である。原点にある m が点 $A(X, Y, 0)$ につくる磁束密度の z 成分 B_z を求めよ。
- (2-2) 点 A に、巻数 N 、断面積 S の検出コイルを z 軸に平行に置く。磁気モーメント m が z 軸方向に振幅 a 、角振動数 ω で単振動している時の検出コイルの起電力を求めよ。ただし $r \equiv \sqrt{X^2 + Y^2} \gg a$ とし、検出コイルの直径は r に比べて十分小さいとする。

- (3) 高純度な銅 (抵抗率 $2 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$) の磁化率を測定する場合、上記 2 つの方法のどちらが適当か。方法とその方法を選んだ理由を答えよ。

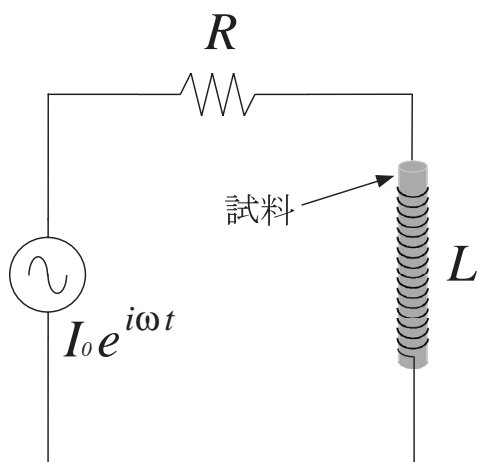


図 1

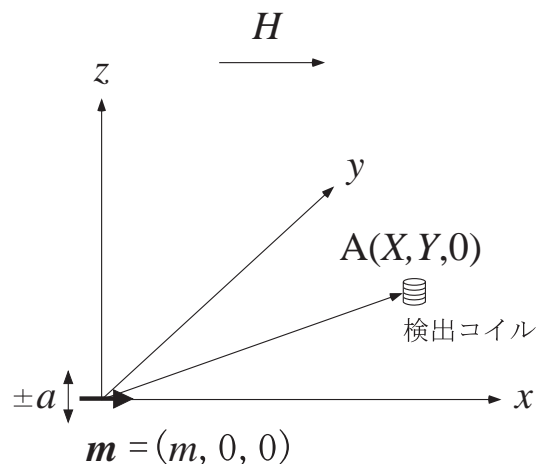


図 2

B6 (宇宙地球実験)

以下の設問(1)から(3)のうち、2問を選択し、解答せよ。

(1) 図にはシリカ(SiO_2)系の相図、また表には様々なシリカ相の結晶構造・密度などのデータが示されている。次の設問に答えよ。なお α -quartz と β -quartz 間の相転移は変移型である。

(1-1) 表の (A)-(C) に適切な語句あるいは数字を入れよ。

(1-2) 表の (a), (b) の欄に入るものを次の (イ)(ロ) から選べ。

(イ) $P3_121, P3_221$ (ロ) $P6_222, P6_422$

(1-3) 表の (c)-(h) の欄に入る数字を次のものから選べ。

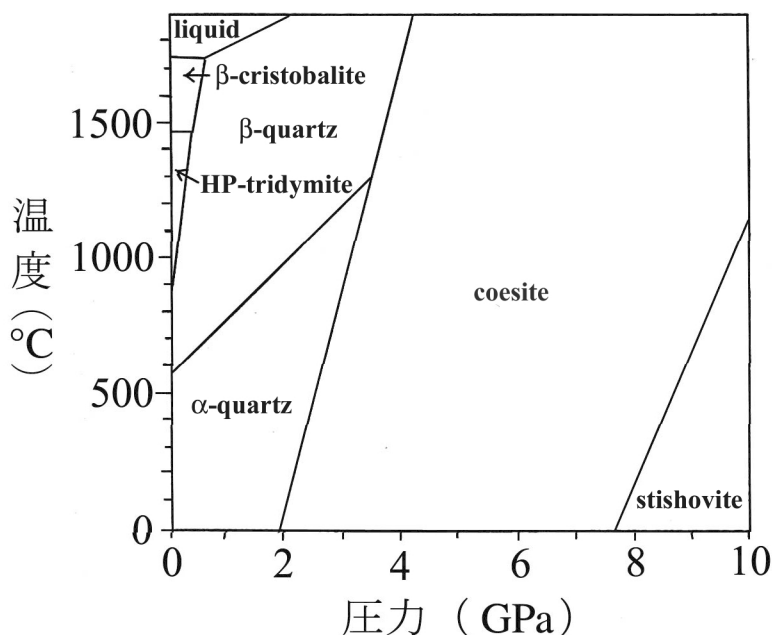
2.53, 2.65, 4.29, 14.0, 22.7, 23.7

(1-4) α -quartz や β -quartz の空間群は 2 通りのものがあるが、これは何故か、簡潔に述べよ。

(1-5) ギブスの自由エネルギー G は、内部エネルギーを E 、温度を T 、エントロピーを S 、圧力を P 、体積を V とすると、次のように表わされる。

$$G = E - TS + PV$$

β -quartz、HP-trydimite、準安定な MC-trydimite について、1 気圧における $G - T$ 図を模式的に示せ。



シリカ相	結晶系	空間群	密度 [g/cm ³]	モル体積 [cm ³ /mol]	備考
α -quartz	(A)	(a)	(c)	(f)	
β -quartz	(B)	(b)	(d)	(g)	
MC-trydimite	単斜	Cc	2.26	26.5	準安定相
HP-trydimite	六方	$P6_3/mmc$	2.18	27.5	
α -cristobalite	正方	$P4_12_12$	2.33	25.7	準安定相
β -cristobalite	等軸	Fd3m	2.21	27.2	
coesite	単斜	C2/c	2.91	20.6	
stishovite	正方	$P4_2/mnm$	(e)	(h)	
silica glass	非晶質		(C)	27.3	準安定相

(2) 放射性同位体は年代測定に利用される。図は Rb-Sr 法を用いたコンドライト隕石によるアイソクロン(等時線)が示されている。なお、 ^{87}Rb は壊変(崩壊)定数 $1.4 \times 10^{-11} \text{yr}^{-1}$ で ^{87}Sr に壊変(崩壊)する。

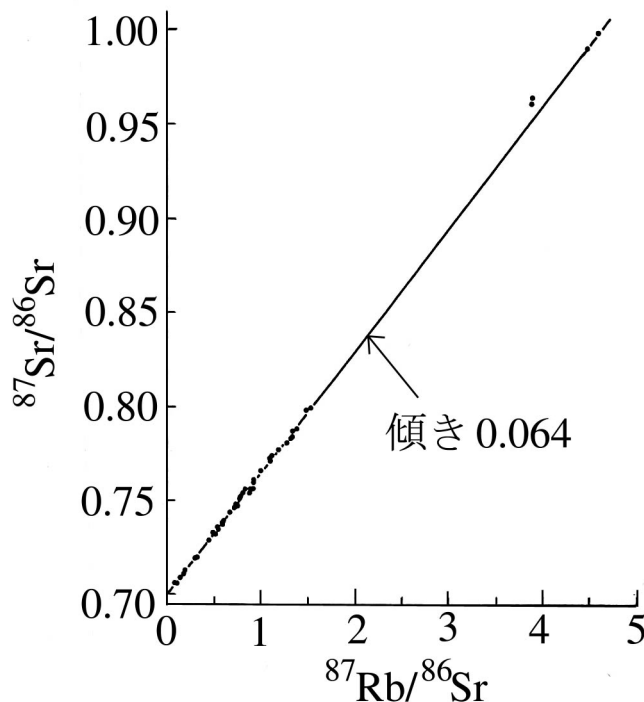
(2-1) 放射性核種の量 N の時間 t による変化(壊変速度)は、 N に比例する。壊変定数を λ とし、放射壊変の式

$$N = N_0 \exp(-\lambda t)$$

を導出せよ。なお、 N_0 は N の初期値である。

(2-2) 図では、様々なコンドライト隕石の全岩がひとつのアイソクロンにのっている。設問(2-1)の式より Rb-Sr 法についてアイソクロンを与える式を導出するとともに、この年代を求めよ。

(2-3) 図の各々のコンドライトについて、その隕石を構成する個々の鉱物も、ほぼ同じアイソクロンにのり、誤差の範囲で同じ $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ 初生比をもっている。これらのことは、何を意味していると考えられるか、簡潔に述べよ。



(3) 次の用語から 5 つを選び、各々 2 ~ 3 行程度で説明せよ。

- | | |
|-----------------|-----------------|
| プレームテクトニクス | スノーボールアース仮説 |
| 火星隕石と生命の火星起源仮説 | CAI |
| 地震波の走時 | 地殻熱流量とその地球科学的意義 |
| モホロピッチ不連続面(モホ面) | マグマの分化 |
| MORB とその地球科学的意義 | 火山フロントとマグマ発生 |
| 接触変成作用 | 逆断層 |
| 礫 | 河岸(河成)段丘とその成因 |
| 不整合 | バイオマット |
| 結晶の格子欠陥 | 固溶体 |