

物理学

（平成15年8月）

1から4までのすべての問題に解答せよ。解答用紙は問題ごとに一枚とし、それぞれに氏名・受験番号・問題番号を書くこと。

問題 1

- (1) 太郎君と花子さんはアフリカに金環食を見に行きました。太陽はほとんど月に隠れて、細い輪だけが輝く神秘的な光景を目にしました。そこで、太郎君はふと月の平均密度  $\rho_m$  と太陽の平均密度  $\rho_s$  とどちらが高いのだらうかと思いました。月は固体だが、太陽はガス体なので、 $\rho_m$  の方が高いと太郎君は言いました。太陽はガス体といっても質量は月に比べて大変大きいので、太陽内部の圧力は高く  $\rho_s$  の方が高いだらうと花子さんは思いました。今いるところは草原で、参考書も何もないので密度を調べることはできません。そこで、だいたいの値を計算してみようということになりました。太陽系では一般に衛星の質量は惑星に比べて圧倒的に小さいのが普通ですが、月と地球の関係は例外で、花子さんは月の質量が地球の質量の  $\frac{1}{80}$  もあることを知っていました。二人は、この値を使って結論を出しました。あなたも、月の平均密度と太陽の平均密度のどちらが高いか調べるために、 $\frac{\rho_m}{\rho_s}$  の値を概算してください。

- (2) 調和振動子の運動方程式は  $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$  となるが、巨視的な運動では必ず何らかの抵抗力が働き、運動はやがて止まってしまう。速さに比例した抵抗力  $2m\mu\frac{dx}{dt}$  が働く場合には、運動方程式は  $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + 2m\mu\frac{dx}{dt} = 0$  となる。この運動方程式は色々なことに応用できる。いま、ドアが閉まるときも同じ運動方程式で表せるとする。この場合、 $x$  はドアの位置、 $m$  はドアの質量、 $k$  は定数、 $\mu$  は抵抗の大きさを表すパラメーターである。時刻  $t = 0$  の時、ドアが開いているとして ( $x = a > 0$ 、 $\frac{dx}{dt} = 0$ )、以下の問に答えよ。

(2-1)  $\mu$  が小さいと、ドアが振動して止まる解が得られる。ドアが振動しないで止まる場合の  $\mu$  の最小値  $\mu_0$  を求めよ。この時の運動方程式を解け。また、横軸を時間  $t$ 、縦軸を  $x$  として、その大体の形を描け。

(2-2)  $\mu > \mu_0$  の時、運動方程式の解を (2-1) のグラフの上に、その解の特徴が判るようにおおよその形を重ねて描け。

## 問題 2

電磁気学は以下のマックスウェル方程式に全てが凝縮されていると言っても過言ではない。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

ここで  $\varepsilon_0$  と  $\mu_0$  は真空中の誘電率と透磁率、 $\rho$  と  $\mathbf{j}$  は電荷密度と電流密度である。

マックスウェルはこの方程式を変形することにより、真空中を光速で伝播する電磁波の存在を予言した。その予言は、ほどなく、ドイツ人のヘルツにより実験的に検証された。さらにヘルツは電磁波に対して反射、屈折、偏光などの実験を行い、電磁波がそれまでに知られていた光(可視光)と同じ性質を持つことを実験的に示した。

上の方程式よりマックスウェルは電磁波の存在を予言した。これを確認することから始めよう。

- (1) 真空中 ( $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ ) を光速  $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  で伝播する電磁波の存在を証明するため、マックスウェル方程式より波動方程式を導け。この際、簡単のため次のような平面波を考える。電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  はそれぞれ  $x$  および  $y$  方向のベクトルであるとし、 $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$  および  $\mathbf{B} = (0, B, 0)$ 、電場の  $x$  成分  $E$  と磁場の  $y$  成分  $B$  が  $z$  と  $t$  のみの関数であるとする。ただし  $z$  軸は電磁波の伝播方向である。

なお波動方程式は  $E$  あるいは  $B$  の一方について導けばよい。

ヘルツは、電磁波の反射をうまく使い、電磁波の伝播速度が光速  $c$  に等しいことを示した。この実験について考えてみよう。

- (2) (1) で考えた真空中での平面波が  $z$  軸の正の向きに伝播する場合を考え、また簡単のため  $E$  と  $B$  を以下のようにとる。

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t), \quad B = B_0 \cos(kz - \omega t), \quad E_0 = cB_0$$

ここで  $E_0$  と  $B_0$  はそれぞれ電場と磁場の強さを示す定数、 $k(> 0)$  と  $\omega(> 0)$  はそれぞれ波数と角振動数で定数である。

この電磁波が、進行方向に対し垂直な  $xy$ -平面に置かれた金属板で 100% 反射されるとする。この金属板は  $z = 0$  に境界を持ち、電気抵抗が無視できる。そこでの反射のため、 $z < 0$  の真空中では元々の電磁波と反射した電磁波が重なり合い定在波が生じる。一方、今考えているような電気抵抗が無視できる金属板中には電場が侵入できない。このこととマックスウェル方程式より、金属板の表面 ( $z = 0$ ) では定在波の電場の大きさがゼロとなることがわかる。

このとき以下の問に答えよ。

- (2-1) 定在波の電場と磁場を  $z$  と  $t$  の式で示せ。
- (2-2) 定在波の電場の振幅が最大となるときのおおよその形、および、磁場の振幅が最大となるときのおおよその形をそれぞれ図示せよ。
- (2-3) またその結果を利用し、電磁波の伝播速度が  $c$  であることを検証する方法について簡単に述べよ。ただし電磁波の角振動数  $\omega$  は既知であるものとする。
- (3) (2) で考えた定在波の磁場の振幅は  $z = 0$  で空間的に不連続となる。これは電磁波を反射する金属板中を流れる電流密度  $\mathbf{j}$  のためである。この  $\mathbf{j}$  を求めよ。なお  $\mathbf{j}$  の記述にはディラックのデルタ関数  $\delta(z)$  を用いてもよい。

### 問題 3

温度  $T$  の壁で囲まれた体積  $V$  の空洞内には電磁場 ( 輻射場 ) が存在する。波動・粒子の二重性から、空洞内に存在する角振動数  $\omega$  の輻射場は、エネルギー  $\hbar\omega$  と大きさ  $\frac{\hbar\omega}{c}$  の運動量を持った相互作用のない多数の粒子 ( 光子 ) からなる気体とみなすことができる。この光子気体の熱平衡状態における内部エネルギーを  $U$  とすると、エネルギー密度  $u = \frac{U}{V}$  はエネルギー密度スペクトル  $u(\omega, T)$  を用いて次式のように書ける。

$$u(T) = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega$$

ただし、エネルギー密度スペクトルは、 $k$  をボルツマン定数として次式で与えられる。

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp\left[\frac{\hbar\omega}{kT}\right] - 1}$$

また、古典電磁気学からは、輻射圧 ( 光子気体が壁におよぼす圧力 )  $p$  とエネルギー密度  $u(T)$  との間には、関係式  $p = \frac{1}{3}u(T)$  の成り立っていることが知られている。これらの事実に基づいて以下の問に答えよ。

- (1) 熱力学第一法則  $dU = \delta Q + \delta W$  ( または  $dU = d'Q + d'W$  ) から、系が準静的微小変化をするときには

$$\delta Q = C_V dT + \left[ p + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] dV$$

の関係式が成り立つことを示せ。ここで、 $\delta Q$  は系が吸収した熱量である。また  $C_V$  は定積熱容量で、一般には  $V$  と  $T$  の関数になっている。

- (2) 光子気体の内部エネルギー  $U$  が  $U(V, T) = aVT^4$  という形に書けることを示せ。ただし、 $a$  は定数である (  $a$  の具体的な表式は求めなくてよい )。

以下の問では、必要な場合には  $a$  を用いて解答すること。

- (3) 光子気体に対しては定圧熱容量が存在しない。なぜか。
- (4) 定積熱容量  $C_V$  を求めた後、(1) で証明した関係式を利用して、光子気体のエントロピー  $S(V, T)$  を決定せよ。ただし、熱力学第三法則により、絶対零度では  $S = 0$  である。
- (5) 光子気体が準静的断熱変化をするとき  $V$ 、 $T$  間に成り立つ関係式を求めよ。また、この関係式は  $pV^\gamma = \text{一定}$  の形にも書き表すことができる。 $\gamma$  の値はいくらか。
- (6) 光子気体を作業物質とするカルノーサイクル

A  $\rightarrow$  B : 準静的等温膨張

B  $\rightarrow$  C : 準静的断熱膨張

C  $\rightarrow$  D : 準静的等温圧縮

D  $\rightarrow$  A : 準静的断熱圧縮

を考える。この状態変化の過程を  $p$ - $V$  面上に表せ。解答用紙には縦軸を  $p$ 、横軸を  $V$  とする  $p$ - $V$  面を描き、状態 A、B、C、D を表す点を記し ( 概略でよい ) 変化の向きを矢印で示すこと。

## 問題 4

- (1) 一次元空間のポテンシャル  $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$  ( $\omega$ は定数) の中で運動する質量  $m$  のスピンを持たない粒子を考える。この系のハミルトニアンは  $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 = T + V$  で与えられる。このとき以下の問に答えよ。

(1-1)  $H$  の規格化された固有状態  $|n\rangle$  に対する消滅、生成演算子  $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$ 、 $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$  は、 $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ 、 $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$  を満たす。これを用いて、状態  $|n\rangle$  における位置の期待値  $\langle n|\hat{x}|n\rangle$ 、および運動量の期待値  $\langle n|\hat{p}|n\rangle$  を求めよ。

(1-2) 状態  $|n\rangle$  における運動エネルギーの期待値  $\langle n|T|n\rangle$ 、およびポテンシャルエネルギーの期待値  $\langle n|V|n\rangle$  を求めよ。またこれより一次元調和振動子の固有エネルギー  $E_n = \langle n|H|n\rangle$  の表式を得よ。

(1-3)  $H$  の基底状態の波動関数  $\varphi_0(x)$  が

$$\langle x|a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right) \langle x|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right) \varphi_0(x) = 0$$

を満たすことを用い、 $\varphi_0(x)$ 、および第一励起状態の波動関数  $\varphi_1(x)$  を求めよ。ただし、波動関数の規格化は考えなくてよい。

- (2) 次に、以下のような三次元空間のポテンシャル  $V(x, y, z)$  中で運動する質量  $m$  のスピンを持たない粒子のシュレディンガー方程式を考える。

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, & (y, z \text{ の値が } 0 < y < L, \text{ かつ } 0 < z < L \text{ を満たす領域}) \\ +\infty, & (y, z \text{ の値が上以外の領域}) \end{cases}$$

(2-1) 変数分離型の解  $\Psi(x, y, z) = \phi_1(x) \phi_2(y) \phi_3(z)$  を仮定して、 $\phi_1(x)$ 、 $\phi_2(y)$ 、 $\phi_3(z)$  それぞれが満たすべき常微分方程式を書き下せ。

(2-2) この系の基底状態のエネルギーと波動関数を求めよ。ただし、波動関数の規格化は考えなくてよい。

(2-3) この系の第一励起状態のエネルギーおよび、その状態の縮重度を求めよ。ただし、条件  $\hbar\omega > \frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$  が満たされているとする。