

理学研究科博士前期課程
(物理学専攻・宇宙地球科学専攻)

入学試験問題

物理学

令和4年8月30日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。答案用紙は問題ごとに 1 枚とし、それぞれに問題番号・受験番号・氏名を書くこと。

問題 1

図 1 のように水平方向に x 軸を取り、 x 軸上の床面に質量 m_A の物体 A と質量 m_B の物体 B が置かれて三本のバネで両側の壁とお互いにつながれている。左側の壁と物体 A をつなぐバネのバネ定数を k_A 、右側の壁と物体 B をつなぐバネのバネ定数を k_B 、物体 A と B の間をつなぐバネのバネ定数を k_{AB} とする。ここで物体 A と B は大きさの無視できる質点とみなしてよい。物体が平衡点にある時、三本のバネの長さはそれぞれ自然長とする。平衡点からの物体 A の変位を x_A 、物体 B の変位を x_B とする（図 1 の矢印の始点が平衡点に対応する）。床面には摩擦がなく空気抵抗は無視してよいものとし、物体 A と B は床面から離れることなく x 軸に沿って動くものとする。そして物体 A と B がぶつかることはない。以下の問いに答えよ。

I. まず最初に物体 A と B の質量が等しく、壁と物体を固定しているバネのバネ定数が等しい場合を考える。このため、 $m_A = m_B = m$ とし、 $k_A = k_B = k$ とおいて、以下では m と k を用いて解答せよ。物体 A と B の間をつなぐバネのバネ定数はこのまま k_{AB} を使用する。

- (1) 変位 x_A と x_B を用いて、物体 A と B の運動方程式を求めよ。
- (2) $x_A + x_B$ と $x_A - x_B$ は単振動を行う。それぞれの角振動数 ω_{A+B} と ω_{A-B} を求めよ。

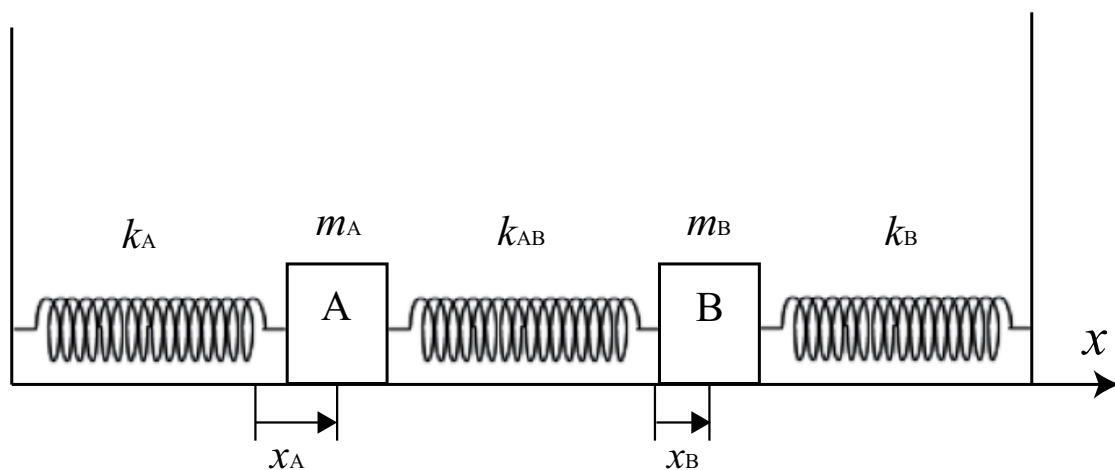


図 1

II. 次に物体 A と B の質量 m_A と m_B が等しくなく、すべてのバネのバネ定数もそれぞれ異なる場合を考える。

(3) まず、物体 A と B の間をつながない場合を考える。物体 A と B が同じ角振動数 ω で単振動した。この事から m_A, m_B, k_A, k_B の関係式を求めよ。

これ以降では物体 A と B の間をバネでつないだ状態を考える。(3) で求めた関係式は成り立つものとする。

(4) この系のラグランジアンを求めよ。

(5) 重心の変位を $x_G (= \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B})$ 、全質量を $m_G (= m_A + m_B)$ 、相対変位を $x_r (= x_A - x_B)$ 、換算質量を $m_r (= \frac{m_A m_B}{m_A + m_B})$ とする。 $x_G, m_G, x_r, m_r, k_{AB}$ と上述の角振動数 ω を用いてラグランジアンを書き換えよ。

(6) (5) で求めたラグランジアンから二つの物体 A と B の重心運動と相対運動の方程式を求めよ。

(7) 相対変位の角振動数を ω_r とすると、これは m_r, ω, k_{AB} を使ってどのように表されるか。

(8) 初期条件として $x_A(0)=x_0, x_B(0)=0$ でどちらも初速度 0 とする。この初期条件を用いて $x_A(t)$ と $x_B(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \boxed{\text{(ア)}} \cos \omega t + \boxed{\text{(イ)}} \sin \omega t + \boxed{\text{(ウ)}} \cos \omega_r t + \boxed{\text{(エ)}} \sin \omega_r t \\ x_B(t) &= \boxed{\text{(オ)}} \cos \omega t + \boxed{\text{(カ)}} \sin \omega t + \boxed{\text{(キ)}} \cos \omega_r t + \boxed{\text{(ク)}} \sin \omega_r t \end{aligned}$$

となる。係数 (ア) ~ (ク) を x_0, m_A, m_B を用いて求めよ。但し、不必要な項の係数には 0 を入れよ。

(9) 初期条件として (8) と同じものを用いる。物体 B に対して物体 A の質量が十分大きいとする。ここで $\frac{k_{AB}}{k_B}$ は小さいが無視できない時に、物体 A と B はそれぞれどのような運動をするのかを振幅と位相に注目して述べよ。 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ の関係式を用いてもよい。

(計算用余白)

(計算用余白)
問題 2 は次ページから。

問題 2

荷電粒子は静磁場で閉じ込めることができる。この基本を理解するために、円柱座標系 (r, ϕ, z) において、電荷 q ($q > 0$)、質量 M の荷電粒子の静磁場中での運動を考える。磁束密度 \mathbf{B} 、荷電粒子の速度ベクトル \mathbf{v} の円柱座標系での成分表示を、それぞれ (B_r, B_ϕ, B_z) 、 (v_r, v_ϕ, v_z) とする。また、運動する荷電粒子からの電磁波の放射と重力の効果は無視できるものとする。

I. まず、 z 軸方向の一様な磁束密度 $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ ($B_z > 0$) において、荷電粒子が z 軸を中心とする半径一定のらせん運動をしている場合を考える。このらせん運動について以下の問いに答えよ。

- (1) らせん運動の半径を、 M, q, B_z, v_ϕ を用いて答えよ。また、 v_ϕ の符号を答えよ。ただし、 z 軸の正の方向から見て反時計回りを v_ϕ の正の向きとする。
- (2) 運動する荷電粒子の磁気モーメント \mathbf{m} は、 \mathbf{r} を位置ベクトル、 \mathbf{v} を速度ベクトルとし、次の式で与えられる。

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} q \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

\mathbf{m} の z 成分 m_z を、 M, B_z, v_ϕ を用いて答えよ。

II. 次に、 z とともに z 成分がゆっくり増加する z 軸まわりに軸対称な磁束密度 $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$ を考える (図 1)。 B_r, B_z は ϕ には依らず、さらに B_z は z 軸に垂直な平面内では一様とみなせ、 z だけの関数となっている。また、任意の z に対し $B_z > 0$ 、 $dB_z/dz > 0$ である。このとき、荷電粒子の運動の xy 平面への射影は、一周期の範囲では円運動と近似できるものとする。この円運動の中心は z 軸上にあり、荷電粒子はらせん運動をしている。

(3) 荷電粒子の運動方程式の z 成分は、荷電粒子に働く力の z 成分を F_z として、 $M(dv_z/dt) = F_z$ と書ける。 F_z を、 q, B_r, B_z, v_ϕ, v_z のうち必要なものを用いて答えよ。

(4) マックスウェルの方程式から、任意の閉曲面 S に対し \mathbf{B} は、

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

を満たす。ここで、 dS は閉曲面 S 上の面積要素、 $\hat{\mathbf{n}}$ は dS 上の外向き法線方向の単位ベクトルである。図 1 のような z 軸を中心軸とする半径 r 、微小幅 dz を

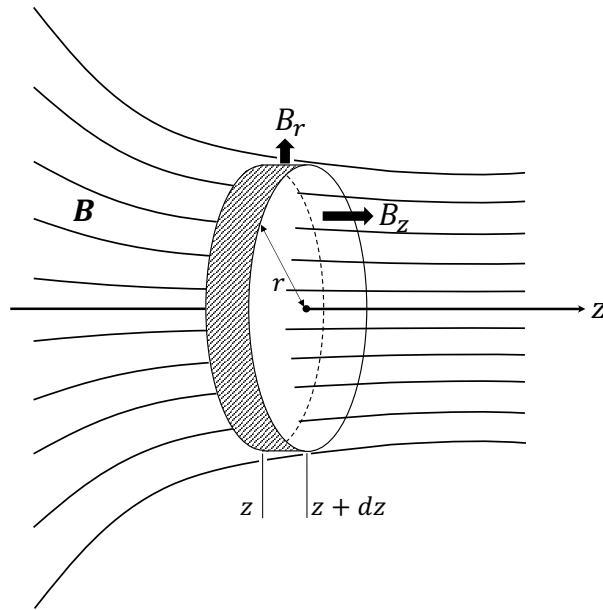


図 1

もつ円柱の表面を S に選んで本式を計算することにより、 B_r を dB_z/dz と r を用いて表わせ。

- (5) これまでの結果を使い

$$F_z = -\frac{M}{2} \frac{v_\phi^2}{B_z} \frac{dB_z}{dz}$$

を示せ。

- (6) 前問の結果をふまえて

$$\frac{v_\phi^2}{B_z} = \text{一定}$$

を示せ。

ヒント：荷電粒子の運動の xy 平面への射影が、一周期の範囲で円運動と近似できるとき、運動エネルギー保存則は $v_\phi^2 + v_z^2 = \text{一定}$ としてよい。このとき、 $v_\phi dv_\phi + v_z dv_z = 0$ が成り立つことを利用して、 z 方向の運動方程式から dv_ϕ/dz と dB_z/dz の関係式を求めよ。

III. II. と同じ磁場中において、同じ条件で z 軸を中心にならせん運動をする荷電粒子は、 $+z$ 方向の初速度をもつ場合でも、進行するにつれて $+z$ 方向の速度が減少し、最終的に $-z$ 方向へ反射される可能性がある。荷電粒子の初期位置 $z = 0$ において、 \mathbf{B} の z 成分を $B_0 (> 0)$ とし、 ϕ 方向と z 方向にそれぞれ初速度 $v_{\phi 0}$ と $v_{z 0}$ を与えた場

合を考える ($v_{z0} > 0$)。このとき以下の問いに答えよ。

- (7) $v_{\phi}^2/B_z = \text{一定}$ と運動エネルギー保存則を利用して、荷電粒子が反射される位置での B_z の大きさを求めよ。
- (8) 荷電粒子が初期位置から反射される位置に近づくにつれて、近似的な円運動の半径と、その円を貫く磁束はどのように変化するか。それぞれ、増加、減少、一定のいずれかで答え、理由を数式を用いて説明せよ。

(計算用余白)
問題3は次ページから。

問題3

量子コンピューターなどの量子情報の分野では、量子状態を外部から操作することが重要になる。ここではそのような操作について考察しよう。

スピン1/2をもつ粒子を xz 面内に向きをもつ磁場中におくと、スピン由来の磁気モーメントと磁場との相互作用によりハミルトニアンは

$$H = -\hbar\omega(n_x\sigma_x + n_z\sigma_z)$$

となる。ここで $\omega(>0)$ は角振動数であり、 $\mathbf{n} = (n_x, 0, n_z)$ は磁場の向きを表す単位ベクトル ($n_x^2 + n_z^2 = 1$) である。また \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は、パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \boldsymbol{\sigma}$ と表す。

σ_z を対角化する基底をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$ と書くことにする。

また以下ではハミルトニアンのエネルギー固有状態のうち、基底状態を $|1\rangle = \cos\theta|\uparrow\rangle + \sin\theta|\downarrow\rangle$ 、励起状態を $|2\rangle = -\sin\theta|\uparrow\rangle + \cos\theta|\downarrow\rangle$ と位相 θ を使って表す。

I. 磁場の向きを表す単位ベクトル \mathbf{n} が一定の場合を考察しよう。

- (1) $\boldsymbol{\sigma}^2$ が保存する事を示せ。
- (2) ハミルトニアンの二つのエネルギー固有値が $\pm\hbar\omega$ となることを示せ。
- (3) 位相 θ について、 $n_x \neq 0$ の場合に $\tan\theta$ を n_x, n_z を用いて表せ。

II. 磁気モーメントと磁場の向きが平行でないとき磁気モーメントは一般に歳差運動を示す。単位ベクトル \mathbf{n} が一定で z 軸と平行でない場合の歳差運動を量子力学的に考察しよう。時刻 $t=0$ で、系の状態が初期状態 $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$ であったとする。時刻 t での状態 $|\psi(t)\rangle$ はシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

に従い時間発展する。

- (4) 時刻 t の状態をエネルギー固有状態 $|1\rangle, |2\rangle$ を使って $|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$ と表したとき、 $c_1(t), c_2(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。
- (5) 初期状態はエネルギー固有状態を使って $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle = \cos\theta|1\rangle - \sin\theta|2\rangle$ と表すことができる。(4) で得られた微分方程式をこの初期条件のもとで解き、時刻 t での状態 $|\psi(t)\rangle$ を θ を用いて表せ。

- (6) 時刻 t での σ_z の期待値 $\langle \sigma_z \rangle$ を以下のようにして求める。係数 (a)、(b)、(c) を 2θ の関数として表せ。

まず (5) でもとめた時刻 t での状態 $|\psi(t)\rangle$ を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ の基底で表すと

$$|\psi(t)\rangle = \left(\cos \omega t + \boxed{\text{(a)}} \sin \omega t \right) |\uparrow\rangle + \left(\boxed{\text{(b)}} \sin \omega t \right) |\downarrow\rangle$$

となる。この状態を使って $\langle \sigma_z \rangle$ を計算すると、

$$\langle \sigma_z \rangle = 1 - \boxed{\text{(c)}} \sin^2 \omega t$$

を得る。これは σ^2 が保存する事も踏まえると磁気モーメントが歳差運動していることを表している。

- III. 磁場を時間的に変化させると量子状態を操作することができる。ここでは磁場の向き \mathbf{n} を時刻 $t = 0$ から $t = \pi/\Omega$ にかけて、 z 軸正の向きから負の向きに一定の角速度 Ω で

$$n_z = \cos \Omega t, \quad n_x = \sin \Omega t$$

のように回転させたとき、量子状態がどのように変化するか調べよう。時刻 $t = 0$ で、初期状態 $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$ であるとする。磁場が z 軸負の向きを向いた時刻 $t = \pi/\Omega$ の状態を終状態とする。

またこのときエネルギー固有状態を表すのに使った位相 θ は t に依存し (3) の結果を使うと $\theta(t) = \frac{\Omega t}{2}$ となる。

- (7) 時刻 t でのハミルトニアンに対する瞬間的なエネルギー固有状態のうち、エネルギー固有値が小さい方の固有状態を $|1(t)\rangle = \cos \theta(t) |\uparrow\rangle + \sin \theta(t) |\downarrow\rangle$ 、大きい方の固有状態を $|2(t)\rangle = -\sin \theta(t) |\uparrow\rangle + \cos \theta(t) |\downarrow\rangle$ と表す。このときそれぞれの時間微分 $\frac{d}{dt} |1(t)\rangle, \frac{d}{dt} |2(t)\rangle$ を、 $\Omega, |1(t)\rangle, |2(t)\rangle$ のうち必要なものを用いて表せ。
- (8) 時刻 t での状態を $|\psi(t)\rangle = a_1(t) |1(t)\rangle + a_2(t) |2(t)\rangle$ と書いたとき、 $a_1(t), a_2(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。
- (9) 十分にゆっくり磁場を回転させることに対応する $\Omega/\omega \rightarrow 0$ の極限、および十分に素早く磁場を回転させることに対応する $\omega/\Omega \rightarrow 0$ の極限で、終状態はそれぞれどうなるか。次のページの選択肢の中から適切な記号を選びそれぞれ解答せよ。ただし選択肢は位相を除いて表示している。(理由を解答する必要はない。問 (8) の結果から考察することもできる。)

終状態の選択肢

- (あ) $|\uparrow\rangle$
- (い) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$
- (う) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$
- (え) $|\downarrow\rangle$

(計算用余白)
問題 4 は次ページから。

問題 4

原子気体をレーザートラップや磁気トラップによって拘束した上で冷却することにより、ボーズアインシュタイン凝縮を起こすことができる。そのような気体の性質を、古典・量子統計力学の両面から考えてみよう。系は質量 m の N 個の互いに区別できない単原子分子 $i = 1, 2, \dots, N$ からなる。これらの位置座標を $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 、運動量を $\mathbf{p}_i = (p_{x,i}, p_{y,i}, p_{z,i})$ とするとハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m} + U(|\mathbf{r}_i|) \right] \quad U(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2$$

で与えられる。ここで調和ポテンシャル U はレーザートラップなどを表し、その強さ ω は調節可能とする。分子間相互作用は無視できるとした。以下、プランク定数を h とし、 $\hbar = h/2\pi$ とする。また温度を T 、ボルツマン定数を k_B 、逆温度を $\beta = \frac{1}{k_B T}$ とする。

I. 1つの分子に注目する。以下の問いに答えよ。

(1) 古典統計力学で解析する準備として、1分子あたりの分配関数

$$Z_1 = \int \frac{dp_x dp_y dp_z dx dy dz}{h^3} \exp(-\beta H_1) \quad H_1 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} |\mathbf{r}|^2$$

を計算せよ。その結果を $\beta\hbar\omega$ を用いて表せ。ここで $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ ($\alpha > 0$) となることを用いよ。

(2) 量子統計力学で解析する準備として、1分子のハミルトニアン H_1 の固有状態を考える。エネルギー固有値は $e_{\text{固有状態}} = e_g + \hbar\omega(n_x + n_y + n_z)$ と表せる。ここで $e_g (= \frac{3}{2}\hbar\omega)$ は基底状態のエネルギーである。ここで n_x, n_y, n_z は異なる固有状態を区別する量子数であるが、それぞれどのような値をとりうるか記せ。

II. この系における特徴的な長さ、エネルギーについて考察しておこう。以下、(a),(b),(c)に当てはまるものを答えよ。

(3) ポテンシャルエネルギーが熱的なエネルギー $k_B T$ と等しくなる点の、原点からの距離を $l_{\text{th}}/\sqrt{\pi}$ とする (図 1 参照)。この長さ $l_{\text{th}} = \boxed{\text{(a)}}$ は気体分子の熱的な広がりを表す長さともみなせる。もう一つの重要な長さは気体分子の量子力学的な広がりを表す熱ドブロイ波長 λ_{th} である。波長 $\sqrt{\pi}\lambda_{\text{th}}$ に対応する運動量の大きさを $|\mathbf{p}| = h/(\sqrt{\pi}\lambda_{\text{th}})$ と表す。この運動量に対応する運動エネルギーと熱的なエネルギー $k_B T$ が等しいとすると $\lambda_{\text{th}} = \boxed{\text{(b)}}$ となる。

- (4) この系の特徴的なエネルギースケールは $\hbar\omega$ である ((2) 参照)。これと熱的なエネルギー $k_B T$ の比は、上で求めた 2 つの長さ l_{th} , λ_{th} を用いて

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = \beta\hbar\omega = \boxed{(c)}$$

と表せる。

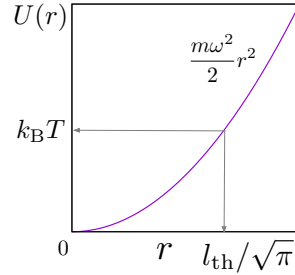


図 1

- III. この系の熱力学を、古典および量子統計力学を用いて考える。以下 $N \gg 1$ とする。II で得られた長さ l_{th} を用いて気体分子の数密度を

$$\rho = \frac{N}{l_{th}^3}$$

と定義する。熱ドブロイ波長 λ_{th} に対応する体積中に含まれる分子数 $\rho\lambda_{th}^3$ が大きくなると量子統計性が重要になる。

- (5) ヘルムホルツの自由エネルギーを F とする。古典統計力学を用いて $-\beta F/N$ を求め、 $\rho\lambda_{th}^3$ のみで表されることを示せ。ここで $\ln N! \simeq N \ln N - N$ が成り立つ。

次に分子をボーズ粒子とし、量子統計力学で考える。温度 T 、化学ポテンシャル μ でのグランドカノニカルアンサンブルを考えると粒子数の期待値 $\langle N \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_{\text{固有状態}} \frac{1}{\exp(\beta(e_{\text{固有状態}} - \mu)) - 1} \\ &= \frac{1}{\exp(\beta(e_g - \mu)) - 1} + \sum_{\text{励起状態}} \frac{1}{\exp(\beta(e_{\text{固有状態}} - \mu)) - 1} \end{aligned}$$

と表せる。ここで $\sum_{\text{固有状態}}$ は「1 粒子あたりのエネルギー固有状態」についての和、また第 2 式の $\sum_{\text{励起状態}}$ はそれから基底状態の寄与を除いたものである。スピンなど他の自由度は考慮しない。 μ のとりうる最大値は基底状態のエネルギー e_g であることを注意しておく。

- (6) $\beta\hbar\omega \ll 1$ が成り立つとき、エネルギー固有値の間隔 $\hbar\omega$ ((2) 参照) は熱的なエネルギー $k_B T$ に比べて十分小さく、励起状態のエネルギー e は連続に分布しているとみなせる。このとき励起状態のエネルギー状態密度が

$$D(e) = \frac{C}{\hbar\omega} \left(\frac{e - e_g}{\hbar\omega} \right)^2$$

のような関数形で表されると仮定してみよう。 C は無次元の正の定数である。この仮定のもとで、 $\rho\lambda_{\text{th}}^3 = \langle N \rangle (\lambda_{\text{th}}/l_{\text{th}})^3$ を求めると

$$\rho\lambda_{\text{th}}^3 = \boxed{\text{(d)}}$$

となる。 (d) に当てはまる表式を下に定義された関数 $I(A)$ 、その他を用いて記せ。

$$I(A) = \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\exp(x+A) - 1} \quad (A > 0)$$

- (7) $\rho\lambda_{\text{th}}^3$ を一定にしたまま巨視的な数 $N (\gg 1)$ の分子を収容するためには、調和ポテンシャルのパラメータ ω が十分小さく、(6) で仮定していた $\beta\hbar\omega \ll 1$ が満たされていなければならないことを示せ。またこのとき、さらに $e_g > \mu$ も成り立つ場合、(6) の結果において基底状態からの寄与は無視できることを示せ。ただし e_g と μ の差はどれほど小さくても $O(1)$ の量とし、 $N \gg 1$ で無視できる微小量になる場合は以下では考えなくて良い。
- (8) N と ω が与えられたある装置を用いて温度 T を変えてゆく実験を考えよう。ただし $N \gg 1$ であり、また ω は十分小さく、実験を行う全ての温度で $\beta\hbar\omega \ll 1$ が成り立つとする。(7) の結果にもとづき、高温から温度 T を下げてゆくところある臨界温度で μ が e_g に達することを示せ。

この臨界温度以下ではボーズ凝縮が起こり、基底状態に巨視的な数の分子が凝集する。

ヒント: 関数 $I(A)$ は図2に示すように $A (> 0)$ に関して単調減少関数で、 $\lim_{A \rightarrow \infty} I(A) = 0$ である。また、 $\lim_{A \rightarrow 0} I(A)$ は有限の値 $I(0)$ であることを用いて良い。

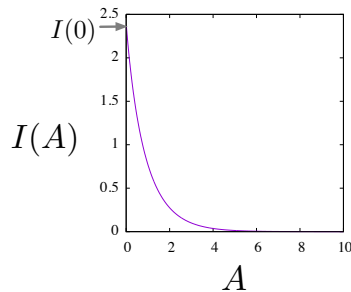


図 2

- (9) 1 粒子エネルギー状態密度が実際 (6) で仮定した関数形になることを示せ。ヒント: 積分 $\int_{e_g}^e de' D(e')$ を考えるとこれはエネルギーが e 以下の励起状態の総数である。

(計算用余白)