理学研究科博士前期課程
(物理学専攻・宇宙地球科学専攻)

入学試験問題

物理学

令和 7 年 8 月 26 日

問題 1 から問題 4 までのすべての問題に解答せよ。答案用紙は問題ごとに 1 枚とし、それぞれに問題番号・受験番号・氏名を書くこと。

問題1

水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、xy 平面上で振り子の運動を考える。重力の方向は鉛直下向き ($-y$ 方向) として、重力加速度の大きさは g とする。また、重力のポテンシャルエネルギーの基準点は原点 O として考えよ。空気抵抗は無視できるものとする。文字の上のドットは時間微分を表す (例えば、時間 t の関数 $f(t)$ について $\dot{f} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \ddot{f} = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$)。

I. 図 1 のように原点 O に固定された長さ ℓ の糸に質量 m の質点をつけた単振り子の運動を考える。糸はたるむことなく、糸自体の質量は無視する。

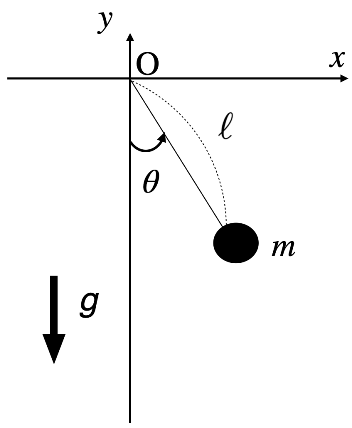

図 1

(1) 鉛直方向と糸のなす角度を θ とする。単振り子のラグランジアン L を $\theta, \dot{\theta}$ などを用いて、$\theta, \dot{\theta}$ の 2 次の項までを残す近似で求めよ。θ は微小角として、$\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ と近似せよ。

(2) オイラー・ラグランジュ方程式を求め、初期条件として $t = 0$ で $\theta = \theta_0$ の位置から静かに手を離したとき、$\theta(t)$ と単振り子の周期を求めよ。

II. 図 2 のように質量 m、長さ $2a$ の太さの無視できる一様な棒の上端が原点 O に固定され、滑らかに回転することができる実体振り子の運動を考える。棒が鉛直方向となす角を θ とし、棒は変形しない。

(3) 固定点 O を通り、xy 平面に垂直な軸の周りの慣性モーメント I は、$I = \dfrac{4}{3}ma^2$ となることを示せ。

慣性モーメント I は、固定点からの距離を ξ、棒の線密度を λ とすると次の線積分で表すことができることを用いてよい。

$$I = \int \lambda \xi^2 \mathrm{d}\xi$$

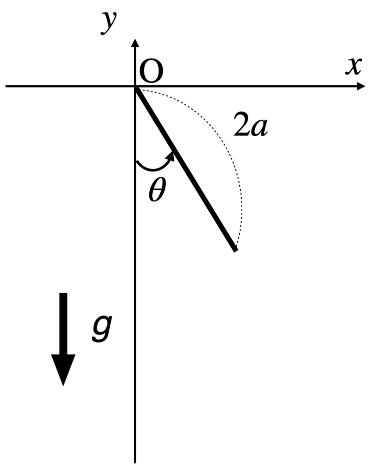

図 2

(4) 系の回転運動のエネルギーと重力のポテンシャルエネルギーから、ラグランジアン L を $\theta, \dot{\theta}$ などを用いて求めよ。剛体の回転運動のエネルギーは $K = \dfrac{1}{2} I \dot{\theta}^2$ となることを用いてよいが、I を使わずに答えよ。θ は微小角として $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ を用いて、$\theta, \dot{\theta}$ の 2 次の項までを残す近似で求めよ。

(5) オイラー・ラグランジュ方程式から、実体振り子の周期を求めよ。また、周期から相当単振り子の長さを求めよ。相当単振り子の長さは、実体振り子を単振り子と考えたときの長さに相当する量として定義される。解答は、I を使わずに答えよ。

III. 次に、図 3 のように問題 **II** と同じ質量 m、長さ $2a$ の一様な棒の先端にばねをつけ、ばねの先端に質量 $m/6$ の質点がつながれているときの質点の運動を考える。棒は固定点 O の周りで自由に回転することができる。ばねは質量が無視でき、曲がらずに伸縮方向のみに伸び縮みする。また、ばねは接続点 P で棒につながっており、点 P の周りに自由に回転することができる。棒の鉛直方向からの角度を θ、ばねの鉛直方向からの角度を φ とする。また、鉛直方向にぶら下げて静止した釣り合いの状態でばねの伸びは ℓ で、このばねのばね定数は $\dfrac{mg}{6\ell}$ となる。

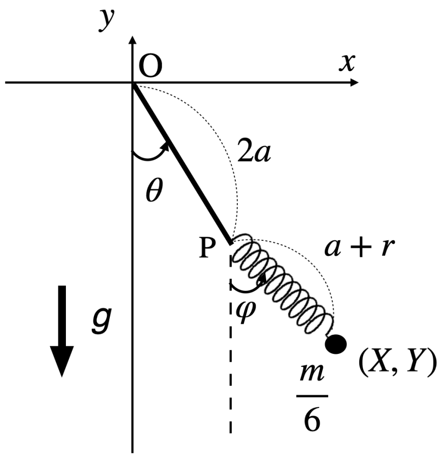

図 3

(6) 質点とばねを鉛直下向きに垂らし、静止したときのばねの長さは a となった。図 3 のように振り子の状態で釣り合いの位置からさらに r だけ伸びたとき、ばねの全体の長さは $a+r$ となる。この状態での質点の位置座標を (X, Y) として、(X, Y) とその時間微分 $(\dot{X}, \dot{Y})$ を $a, r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ などを用いて求めよ。

(7) ばねの自然長からの伸びは $\ell + r$ になることに注意し、この系のポテンシャルエネルギーを求めよ。ばねが自然長のときを、弾性エネルギーの基準点とする。θ, φ は微小角として $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ などの近似を用いて、r, θ, φ の 2 次の項までを残す近似で求めよ。

(8) 系の運動エネルギーは、質点の運動エネルギーと棒の回転運動のエネルギーで表すことができる。運動エネルギーを求め、ラグランジアン L を $r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ の 2 次の項までを残す近似で求めよ。

(9) r に関するオイラー・ラグランジュ方程式を求めることで、r の振動は θ, φ に依存せず r が基準座標であることがわかる。r の振動の周期を求めよ。

(10) θ, φ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。また、$Q_1 = 4\theta + \varphi$, $Q_2 = 2\theta - \varphi$ を基準座標とすることで、$\ddot{Q}_1 = -AQ_1$, $\ddot{Q}_2 = -BQ_2$ となり基準振動となることを示し、Q_1, Q_2 の相当単振り子の長さを求めよ。

（計算用余白）
問題 2 は次ページから。

問題 2

粒子の集団が、細い流れとなって並進し、互いにほとんど衝突しないものをビームと呼ぶ。本問では同一の速度をもつ複数の電子で構成されたビーム、つまり電子ビーム、について考える。

図 1 のように、円筒形状の電子ビームが $z=+\infty$ から $z=-\infty$ に向かって z 軸に沿って真空中を伝播している。電子ビーム内における電子密度分布及び電流密度分布は常に空間的に一様で、ビームの半径は常に一定であるとする。電子ビームの中心軸を z 軸とし、電子ビームの半径を R、電子の電荷を $-e(e>0)$、電子の質量を m とする。

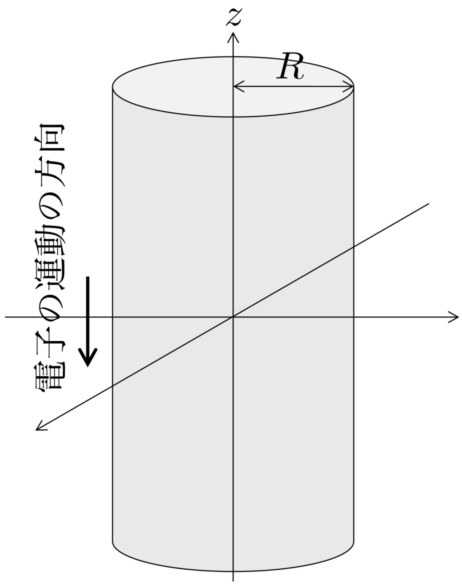

図 1

位置 $\boldsymbol{x}$、時刻 t における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ は、以下のマックスウェル方程式を満たす。ε_0 は真空の誘電率、μ_0 は真空の透磁率、$c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ は光速であり、いずれも正の定数である。$\rho(\boldsymbol{x},t)$ は電荷密度、$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)$ は電流密度である。

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\rho(\boldsymbol{x},t)}{\varepsilon_0} \tag{i}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{ii}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{iii}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{iv}$$

以後の問において、任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ に対し、$(\boldsymbol{F})_a=F_a$ は $\boldsymbol{F}$ の a 成分を表し、f は任意の関数を表す。

I. 電子ビームの電流の大きさ I が時間変化しない場合について、以下の問に答えよ。

(1) 時間変化がないとき、「磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の任意の閉曲線 C 上にわたる線積分の値は、C によって囲まれる面 S を貫く電流密度の面積分に μ_0 をかけたものに等しい」。この法則を説明するのに最も適したマックスウェル方程式を式 (i)、(ii)、(iii)、(iv) の中から一つ選択せよ。

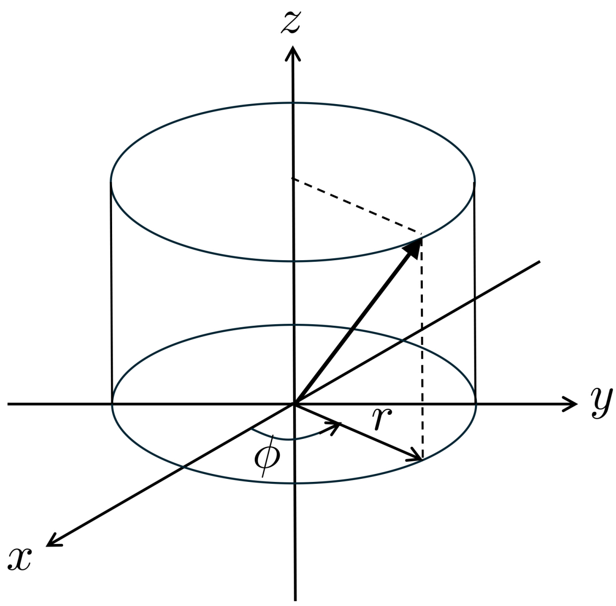

図 2

(2) 図 2 の円筒座標系 (r, ϕ, z) で考えると、系の対称性から、電子ビームが作る磁束密度は B_ϕ のみをもつことが分かる。$r \leq R$ の場合に、式 (v) が成り立つことを示せ。

$$B_\phi(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \qquad \text{(v)}$$

(3) r を横軸とし、$B_\phi(r)$ を縦軸として、模式的にグラフを描け。
横軸は $r = 0$ から電子ビームの外側（$r > R$）を含む範囲までグラフを描くこと。グラフ中には原点、横軸においては R、縦軸においては $\mu_0 I/(2\pi R)$ の座標を明記すること。

II. 上述の電子ビームが作る磁場により電子ビーム中の電子は、円筒座標系 (r, ϕ, z) の r 方向にローレンツ力を受ける。

物理学者アルフベンは、図 3 のように、ビームの外縁 $(r = R)$ にて z 方向にのみ $-v_z$ の速度で運動している電子の、ローレンツ力による円運動の半径が $R/2$ になる電流の大きさが、電子ビームが安定に伝播可能な電流の最大値であると推察した。この

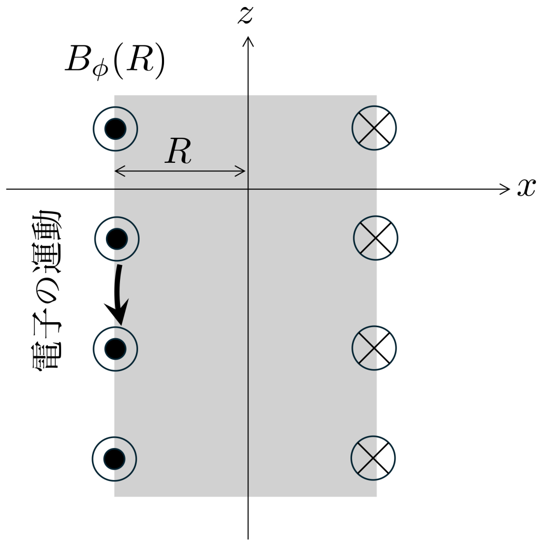

図 3

仮定で定まる最大電流をアルフベン電流限界 I_{A} と呼ぶ。実際、I_{A} を超えると電子ビームは不安定になる。

なお、アルフベンは導出において特殊相対性理論を考慮したが、本問では考慮しない。

(4) $r = R$ において z 方向にのみ $-v_z$ の速度で運動している電子の、ローレンツ力による円運動の曲率半径が $R/2$ になる I_{A} を m, v_z, e, μ_0 などを用いて表せ。ここでは、電子が作る静電場は考慮しない。

(5) 電子の速度を $v_z = 3.0 \times 10^8$ m/s とし、$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2, $\pi = 3.1$ を用いて、問 **(4)** で求めた I_{A} の絶対値を単位とともに有効数字 2 桁で求めよ。

III. 電流密度が緩やかに時間変化する電子ビーム（$\partial \boldsymbol{J}/\partial t \neq 0$）について、円筒座標系 (r, ϕ, z) で考える。ビームの電子密度分布及び電流密度分布の z 軸方向の変化は緩やかであり、ここでも電子密度分布及び電流密度分布は空間的に一様とみなせる。

(6) $r < R$ の領域において $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})$ を計算し、電場に関して下式の空欄 (A) と (B) に入る数式を $\boldsymbol{\nabla}$, t, c, $\boldsymbol{J}$, ε_0 及び偏微分記号 ∂ などを用いて答えよ。空欄内では符号は用いてはならない。

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boxed{\quad\text{(A)}\quad} - \boxed{\quad\text{(B)}\quad}$$

なお、必要であれば $\boldsymbol{F}$ に対するベクトル恒等式は下式であることを用いてよい。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})$$

IV. 図 4 のように、電流密度が緩やかに時間変化する無限に細い電子ビーム ($R \approx 0$) が伝播する状況を考える。電流密度の時間変化によって真空中に電磁波が生じ、その電磁波の電場成分は円筒座標系 (r, ϕ, z) において $\tilde{E}_z(r,t)$ のみを持ち、$z=0$ 平面内を $+r$ 方向に伝播している。$r > R$ の領域に関して、以下の問に答えよ。

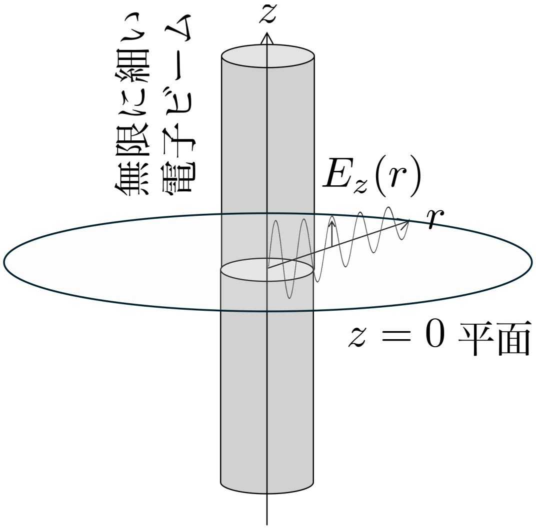

図 4

(7) 振動電場 $\tilde{E}_z(r,t)$ に関する波動方程式を r, t, c 及び偏微分記号 ∂ などを用いて答えよ。一方、$\boldsymbol{\nabla}$ 記号を使ってはならない。

なお、必要であれば円筒座標系 (r, ϕ, z) において、$\boldsymbol{\nabla}^2$ は下式となることを使ってよい。

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{F}\right)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}$$

(8) $\tilde{E}_z(r,t) = E_z(r)\cos(\omega t)$ と変数分離し、$x = \boxed{\quad (C) \quad}$ と $k = \omega / c$ を用いると、問 **(7)** の答えから式 (vi) の 0 次のベッセル方程式が得られる。

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + x^2 f = 0 \qquad \text{(vi)}$$

導出過程を示した上で、空欄 (C) に入る数式を k, r などを使って答えよ。

(9) $x \to \infty$ の極限における、式 (vi) の近似解を用いると、$r \to \infty$ の極限における電磁波の電場 $\tilde{E}_z(r,t)$ の近似解は下式となる。ここで、E_0 は定数である。

$$\tilde{E}_z(r,t) = E_0 r^{-1/2}\cos\psi \qquad \text{(vii)}$$
$$\psi = kr - \omega t - \frac{\pi}{4}$$

式 (vii) から $\tilde{B}_\phi(r,t)$ を求め、r, k, E_0, ω, ψ などを使って答えよ。積分定数の決定においては、一振動周期にわたる $\tilde{B}_\phi(r,t)$ の時間平均が 0 であることに注意せよ。任意の関数 $f(t)$ の時間 T にわたる平均値は下式とする。

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

なお、必要であれば円筒座標系 (r, ϕ, z) において、$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})_\phi$ は下式となることを使ってよい。

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})_\phi = \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}$$

(10) 式 (vii) と問 **(9)** の解を用いて、この電磁波のポインティング・ベクトルを $T = 2\pi/\omega$ の時間で平均した大きさ $\langle S_r(r) \rangle_T$ を求め、r, k, E_0, ω, μ_0 などを用いて答えよ。

(11) $r \to \infty$ の極限で $1/x \to 0$ となることから、式 (vi) の左辺の第二項は無視することができそうである。しかしながら、当該項を無視した偏微分方程式から求められる解は物理的に正しくない。この解が物理的に正しくないことを、エネルギーの観点から簡潔に説明せよ。

（計算用余白）
問題 3 は次ページから。

問題 3

以下においてプランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。また、a を正の定数とする。

I. 一次元空間において、以下のポテンシャル中の質量 m の粒子を考える。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -\dfrac{a}{2} \leq x \leq \dfrac{a}{2} \\ \infty & x < -\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2} < x \end{cases}$$

(1) 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書き下せ。方程式を満たす固有関数を $\phi(x)$、エネルギー固有値を E とし、ポテンシャル $V(x)$ はそのまま用いてよい。

(2) $\phi(a/2)$、$\phi(-a/2)$ の値をそれぞれ答えよ。

(3) 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を解いて、エネルギー固有値と、規格化された固有関数 $\phi(x)$ を求めよ。

なお、以下の問においては、ここで求めた固有関数系が完全正規直交系をなすことを既知としてよい。

(4) 粒子が

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{30}{a^5}}\left[\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - x^2\right] & -\dfrac{a}{2} \leq x \leq \dfrac{a}{2} \\ 0 & x < -\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2} < x \end{cases}$$

で与えられる規格化された波動関数の状態にあるときに、エネルギーを観測したとする。$\psi_0(x)$ が偶関数であることに注意し、各エネルギー固有値が観測される確率を、量子数の偶奇に分けて求めよ。必要があれば、n を奇数とするときの以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^1 (1-y^2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}y\right)\mathrm{d}y = \frac{16}{n^3\pi^3}(-1)^{(n+1)/2}$$

(5) 粒子が問 **(4)** の $\psi_0(x)$ で与えられる状態にあるときに、各エネルギー固有値が観測される確率を用いることによって、エネルギーの期待値とその標準偏差を求めよ。なお、一般に物理量 O の期待値を $\langle O\rangle$ と表すことにすると、ハミルトニアンを H として、エネルギーの標準偏差は $\sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2}$ によって求められる。必要があれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

を用いてよい。

(6) 問 **(5)** におけるエネルギーの標準偏差を求めるために必要な $\langle H^2\rangle$ は、$-a/2 \leq x \leq a/2$ の範囲の $\psi_0(x)$ を用いて、

$$\int_{-a/2}^{a/2} \psi_0(x) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \right\}^2 \psi_0(x)\mathrm{d}x$$

によって求められそうであるが、この積分はゼロになってしまい、$\langle H^2\rangle$ として正しい結果を与えない。この考え方のどこに誤りがあるか、簡潔に説明せよ。

(7) この一次元ポテンシャルの問題に対する、時間に依存するシュレーディンガー方程式を満たす波動関数を $\psi(x,t)$ と表すとき、初期条件 $\psi(x,t=0) = \psi_0(x)$ (問 **(4)** の $\psi_0(x)$) を満たす $\psi(x,t)$ を無限級数の形で求めよ。

II. 一次元空間において、次式で与えられるポテンシャルに、$x > a$ の領域から一定のエネルギー E、質量 m の粒子が入射した場合の定常状態を考える。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

ただし V_0 は正の定数であり、粒子のエネルギーは $E > V_0$ とする。また、$k_2 = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$、$k_3 = \sqrt{2mE}/\hbar$ と置くものとする。

(8) $x = 0$ での境界条件を考慮して、$0 \leq x \leq a$ の領域における時間に依存しないシュレーディンガー方程式の解を、任意定数を含む三角関数の形で表せ。

(9) $x > a$ の領域におけるシュレーディンガー方程式の解を、B, δ を実定数として、

$$\phi(x) = B(e^{-ik_3x} + e^{2i\delta}e^{ik_3x})$$

という形に書くとき、$x = a$ における波動関数の接続条件を考えることにより、δ を tan と arctan を用いた形で求めよ。

(10) 問 **(9)** で与えられた $\phi(x)$ の右辺の物理的な意味について、「反射率」「位相」という言葉を含めて簡潔に説明せよ。

（計算用余白）

（計算用余白）
問題 4 は次ページから。

問題 4

温度 T の熱浴に接し、一様なサイト（格子点）上に上向きまたは下向きの 2 状態をとるスピンを配置した、イジングモデルを考える。ここでは、各サイトの最近接サイト数を z、全サイト数を $N(\gg z)$ とし、系のハミルトニアンが

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - h \sum_{i=1}^{N} S_i$$

と与えられるとする。S_i はサイト i $(i = 1, 2, ..., N)$ にあるイジングスピンであり、下向き、上向きに対応する $-1, 1$ の 2 つの値を取るものとする。$\langle i, j \rangle$ は最近接サイトの対、J は交換相互作用定数、h は磁場である。以下の問題では、N が十分大きいため、系の端の効果を無視する。また、系の体積は変化しないものとする。ボルツマン定数を k_{B} とし、逆温度を $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}} T}$ とする。なお、双曲線関数は以下のように表される。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

I. まず、イジングスピン同士が相互作用しない $J = 0$ について、任意の温度 T、磁場 h を与える際、以下の各問に答えよ。

(1) 系全体の分配関数 Z が

$$Z = \{2 \cosh(\beta h)\}^N$$

となることを示せ。

(2) 系全体のヘルムホルツの自由エネルギー F を $\beta,\ h$ などを用いて表せ。

(3) 系全体の内部エネルギー U を $\beta,\ h$ などを用いて表せ。

(4) 全平均磁化 M は、問 **(2)** のヘルムホルツの自由エネルギーを用いて $M = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial h}\right)_T$ と表される。これより M を $\beta,\ h$ などを用いて表せ。また、M の h 依存性について、横軸を h、縦軸を M として図示せよ。なお、曲線は $|h| < 3/\beta$ 程度の範囲で描くこと。必要があれば、$y = \tanh x$ の概形（図 1）を参考にせよ。

(5) $h \ll -1/\beta$、$h = 0$、$h \gg 1/\beta$ を満たす 3 種類の磁場を与えた際、問 **(4)** で求めた全平均磁化 M の値（漸近値）をそれぞれ求めよ。また、それぞれの磁場のもとで各サイトのイジングスピンがどの様な方向を向いているか説明せよ。

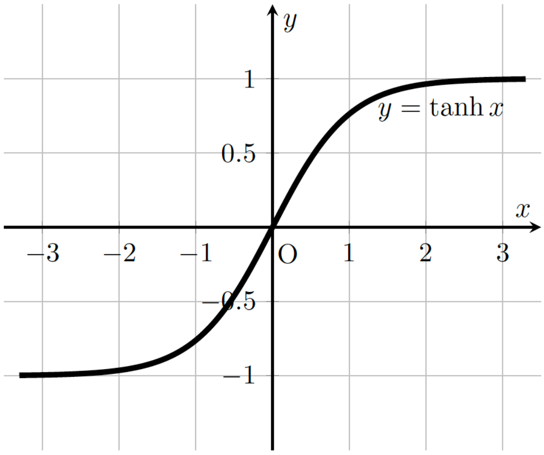

図 1

II. 次に、イジングスピン同士が相互作用する $J > 0$ の場合ついて、イジングスピン 1 つあたりの熱平均（平均磁化）を m とする平均場近似を考える。任意の温度 T、磁場 h を与える際の振る舞いについて、以下の各問に答えよ。

(6) サイト i のイジングスピンの揺らぎを $\delta S_i = S_i - m$ とする。平均場近似では、これらの揺らぎに関する 2 次以上の寄与を無視する。以上を踏まえ、平均場近似を施したハミルトニアン H_{MF} は m を用いて

$$H_{\mathrm{MF}} = -Jz\sum_{i=1}^{N} mS_i - h\sum_{i=1}^{N} S_i + \frac{1}{2}Nzm^2J$$

となることを示せ。必要があれば、以下のヒントを参考にせよ。
(ヒント)
- 最近接サイトの対の和 $\displaystyle\sum_{\langle i,j\rangle}$ は $i,\ j$ に対して交換可能である。
- 数え上げの際の重複に注意することで $\displaystyle\sum_{\langle i,j\rangle} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\in(i\text{ の最近接サイト})}$ と表せる。

(7) 問 **(6)** より平均場近似を施したハミルトニアン H_{MF} は 1 体問題に帰着し、問題 **I** と同様に解析することができる。これを踏まえ、問 **(6)** の結果を用いることで、H_{MF} に対応する系全体の分配関数 Z_{MF} を $\beta,\ h,\ m$ などを用いて表せ。

(8) H_{MF} に対応する系全体のヘルムホルツの自由エネルギー F_{MF} を $\beta,\ h,\ m$ などを用いて表せ。

(9) これまでの議論では、m に任意の値を入れても形式的には議論が成立してしまう。m が物理的に意味のある平均磁化であるためには、F_{MF} から求まるイジングスピン 1 つあたりの平均磁化が、m に等しいという熱力学的拘束条件を満た

す必要がある。このような拘束条件のもと、m が満たすべき方程式（自己無撞着方程式/セルフコンシステント方程式）が

$$m = \tanh\{\beta(Jzm + h)\}$$

となることを導け。

III. 次に、問題 **II** の条件のもと、$h = 0$ の場合を考える。$f(m) = \tanh(\beta Jzm)$ とするとき、問 **(9)** から m が満たすべき自己無撞着方程式は

$$m = f(m)$$

となる。一方、これを満たす m の解の個数は温度によって異なる。T_{c} を強磁性臨界温度とするとき、自己無撞着方程式は、$T \geq T_{\mathrm{c}}$ のときは 1 つ、$T < T_{\mathrm{c}}$ のときは 3 つの解をもつ。この振る舞いは関数 $y = m$ と $y = f(m)$ の交点の個数により議論可能である。この中で $m \neq 0$ である解は自発磁化を表す。以上を踏まえ以下の各問に答えよ。

(10) T_{c} を $J,\ z,\ k_{\mathrm{B}}$ を用いて表せ。

(11) $T < T_{\mathrm{c}}$ において温度 T が十分 T_{c} に近いときを考える。このとき、自発磁化を $\dfrac{T_{\mathrm{c}} - T}{T_{\mathrm{c}}}$ の最低次までを考慮することで、

$$|m| \propto \left(\frac{T_{\mathrm{c}} - T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

と近似できることを示せ。必要があれば、双曲線関数 $\tanh x$ が、$|x| \ll 1$ であるとき、

$$\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$$

と近似できることを用いてよい。

（計算用余白）

（計算用余白）